F502 Eletromagnetismo I

Turma A | 1º Semestre - 2010 | Márcio José Menon

Capítulo 3

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ELETROSTÁTICOS - TÉCNICAS ESPECIAIS

• ÍNDICE

3.1 Equação de Laplace
3.2 O Método das Imagens
3.3 Separação de Variáveis
3.4 Expansão Multipolar

3.1 Equação de Laplace
a. Condições Físicas de Interesse
b. Funções Harmônicas
b.1 Equação de Laplace e Simetrias
b.2 Soluções da Equação de Laplace
c. Propriedades Fundamentais das Funções Harmônicas
c.1 Princípio da Superposição
c.2 Monotonicidade
c.3 Unicidade das Soluções
• Condições de Contorno de Dirichlet e de Neumann
• Teorema da Unicidade

3.2 O Método das Imagens
a. Idéia Geral
b. Exemplos

3.3 Separação de Variáveis
a. Conceitos Básicos
a.1 Funções Ortogonais
a.1.1 Motivação e Conceito
a.1.2 Definições Formais
a.1.3 Exemplos
a.2 Mecanismo do Método de Separação de Variáveis
a.2.1 Idéia Geral
a.2.2 Mecanismo do Método
b. Problemas com Simetria Retangular
b.1 Equações Ordinárias - Coeficientes Constantes
b.2 Soluções das Equações Ordinárias - Séries Trigonométricas
b.3 Exemplos

c. Problemas com Simetria Esférica

c.1 Equações Ordinárias - Coeficientes Constantes e Coeficientes Variáveis - Equação de Legendre

c.2 Problemas com Simetria Azimutal - Polinômios de Legendre e Harmônicos Zonais

c.3 Problemas sem Simetria Azimutal - Polinômios Associados de Legendre e Harmônicos Esféricos

c.4 Exemplos

d. Problemas com Simetria Cilíndrica

d.1 Equações Ordinárias - Coeficientes Constantes e Coeficientes Variáveis - Equação de Bessel

d.2 Problemas com Simetria Axial - Harmônicos Cilíndricos

d.3 Exemplos

3.4 Expansão Multipolar

a. Introdução

a.1 Motivação e Idéia Geral

a.2 Conceito Básico: Potencial de um Dipolo Elétrico a Grandes Distâncias

- Expressão Geral do Potencial
- Momento de Dipolo

b. Expansão Multipolar de uma Distribuição Contínua de Cargas

b.1 Expressão Geral

b.2 Termo de Monopolo

b.3 Termo de Dipolo

- Expressão Geral
- Momento de Dipolo da Distribuição de Cargas
- Expressão em Coordenadas Retangulares

b.4 Termo de Quadrupolo

- Expressão Geral
- Expressão em Coordenadas Retangulares
- Momento de Quadrupolo da Distribuição de Cargas

b.5 Termo de Octupolo

- Expressão Geral
- Expressão em Coordenadas Retangulares
- Momento de Octupolo da Distribuição de Cargas

c. Caso de Distribuições Discretas de Cargas

c.1 Limites Discreto - Contínuo

c.2 Momentos das Distribuições de Cargas

d. Resumo - Expansão Multipolar

d.1 Distribuições Contínuas de Cargas

d.2 Distribuições Discretas de Cargas

e. Exemplos

e.1 Distribuição Contínua - Casca Esférica

e.2 Distribuição Discreta - O Dipolo

e.3 Outros Exemplos

f. Propriedades Notáveis da Expansão Multipolar
f.1 Caráter Tensorial dos Momentos das Distribuições de Cargas
f.2 Dipolo Físico e Dipolo Puro
f.2.1 Conceitos e Definições
f.2.2 Campo Elétrico de um Dipolo Puro
• Expressão Vetorial
• Coordenadas Esféricas
f.3 Influência da Origem do Sistema de Coordenadas na Expansão Multipolar
f.3.1 Carga Puntual
• Na Origem (Monopolo Puro)
• Fora da Origem
f.3.2 Momentos de Monopolo e de Dipolo
• Momento de Monopolo
• Momento de Dipolo
f.4 Propriedades de Simetria dos Momentos das Distribuições
f.4.1 Momento de Monopolo
f.4.2 Momento de Dipolo
f.4.3 Momento de Quadrupolo
• Propriedades Básicas da Representação Matricial
• Propriedades de Simetria da Distribuição de Cargas
f.4.4 Exemplos

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

Os exemplos e problemas indicados, referem-se ao livro texto principal (Griffiths, 3a. edição).

3.1 Equação de Laplace

Questão 1. Mostre que se $V_1(\vec{r})$, $V_2(\vec{r})$,..., $V_n(\vec{r})$ são funções harmônicas, então $V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$+....$V_n(\vec{r})$ também é harmônica (Princípio da Superposição para a Equação de Laplace).

Questão 2. Mostre que os valores máximos e mínimos de uma função harmônica numa região do espaço (volume), ocorrem nas superfícies que são fronteiras da região (monotonicidade).

Questão 3. Demonstre o Teorema da Unicidade para as funções harmônicas: " Uma função $V(\vec{r})$ que satisfaz a equação de Laplace numa região ν (volume) e as condições de contorno nas fronteiras da região (Dirichlet e/ou Neumann), é única a menos de uma constante aditiva."

3.2 O Método das Imagens

Questão 4. O que é o Método das Imagens? Discuta as características gerais e as bases do método.

Questão 5. Dê dois exemplos de aplicação do Método das Imagens em problemas da eletrostática.

3.3 Separação de Variáveis

Questão 6. Sejam m, n = 0, 1, 2, 3,.... e

$$\delta_{mn} = \begin{cases} = 1 \text{ se } m = n \\ = 0 \text{ se } m \neq n \end{cases}$$

Demonstre os resultados abaixo (veja sugestões que seguem):

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \, dx = 0, \ \forall \, m$;

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 2\pi \, \delta_{m0}$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0, \ \forall \, m, n$;

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \ \cos nx \, dx = \pi \, \delta_{mn}, \ m \text{ e/ou} n \neq 0$;

(para $m = n = 0$ o resultado é 2π e para m ou n = 0: ítem (b)).

e) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \pi\delta_{mn}, \; m \text{ e/ou} n \neq 0$;

(para m ou $n = 0$ o resultado é 0).

Sugestões:
1) resolva os ítens na sequência (a) $\rightarrow$ (e);
2) analise a paridade dos integrandos (os extremos são simétricos);
3) em alguns ítens é prático resolver separadamente: m ou $n = 0$ e m ou $n \neq 0$;
4) Para trnasformar produto de funções trigonométricas, utilize

$$\cos(A \pm B) = \cos A \; \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Questão 7. Com base nas sugestões que seguem abaixo, mostre que, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx,$$

então os coeficientes da série são dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \; n = 1, 2, 3, ... \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx, \; n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

Sugestões:
1) integre a expressão em série de $f(x)$ em x, de $-\pi$ a π e utilize os resultados da questão anterior;
2) multiplique a expressão em série de $f(x)$ por $\cos mx$, integre em x de, $-\pi$ a π e utilize os resultados da questão anterior;
3) multiplique a expressão em série de $f(x)$ por sen mx, integre em x, de $-\pi$ a π e utilize os resultados da questão anterior.

Questão 8. Discuta as analogias entre os resultados das questões 6 e 7 e os conceitos geométricos (vetoriais) de ortogonalidade, ortonormalidade e componentes de um vetor numa dada base.

Questão 9. Considere um conjunto de funções reais de variável real, $g_m(x)$, m = 0, 1, 2, 3,...., definidas num intervalo $[a, b]$.
a) Dê a definição de *Produto Interno* de duas funções no intervalo $[a, b]$.
b) Dê a definição de *Norma de uma Função* $g_m(x)$.
c) Dê a definição de *Conjunto Ortogonal de Funções* num dado intervalo.
d) Dê a expressão geral da *Condição de Ortogonalidade* do conjunto de funções em termos da norma. Dado um conjunto ortogonal, como se obtém o conjunto ortonormal correspondente?

Questão 10. Considere a *Série de Fourier Generalizada* para o conjunto ortogonal de funções do ítem anterior,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, g_m(x).$$

Mostre que os coeficientes são dados por

$$c_m = \frac{1}{||g_m||^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx,$$

onde $||g_m||$ é a norma das funções.

Questão 11. Dê 3 exemplos de conjuntos de funções ortogonais. Justifique a resposta e determine os conjuntos ortonormais correspondentes.

Questão 12. Discuta as características gerais do *Método de Separação de Variáveis*.

Questão 13. Considere a equação de Laplace em coordenadas retangulares. Utilizando o Método de Separação de Variáveis, obtenha as 3 equações a derivadas ordinárias correspondentes. Classifique essas equações e discuta as soluções.

Questão 14. Exemplo 3.3.

Questão 15. Exemplo 3.4.

Questão 16. Considere a equação de Laplace em coordenadas esféricas. Utilizando o Método de Separação de Variáveis, obtenha as 3 equações a derivadas ordinárias correspondentes. Classifique cada uma dessas equações.

Questão 17. A equação associada à variável θ na questão anterior, pode ser escrita na forma denominada *Equação de Legendre*,

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} \, y'(x) - \frac{\lambda}{1-x^2} \, y(x) = 0,$$

onde $x = \cos\theta$. A substituição de uma série de potências,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n,$$

leva às seguintes soluções polinomiais nos casos em que $\lambda = l(l+1)$, l = 0, 1, 2, 3,...:

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-2n)! (l-n)!} x^{l-2n},$$

onde

$$N = \begin{cases} = l/2 \text{ se } l \text{ é par} \\ = (l-1)/2 \text{ se } l \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) Com base nessa solução, determine os polinômios $P_0(x)$, $P_1(x)$ e $P_2(x)$.
b) Faça um esboço desses polinômios em função de x no intervalo $[-1, 1]$.
c) Obtenha os 3 polinômios acima através da Fórmula de Rodrigues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

d) Mostre que $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

Questão 18. a) Mostre que os polinômios de Legendre obedecem à condiçãode ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

(consulte, por exemplo, E. Butkov, Física Matemática, Secs. 9.5 e 9.6).
b) Mostre que em termos da variável $\theta = \cos^{-1} x$, a condição acima é expressa por

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\, \text{sen}\, \theta\, d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}.$$

Questão 19. Exemplo 3.8.

Questão 20. Exemplo 3.9.

Questão 21. Repita a questão 16 utilizando coordenadas cilíndricas.

Questão 22. Problema 3.24.

Questão 23. Problema 3.25.

3.4 Expansão Multipolar

Questão 24. Seja $f(x)$ uma função possuindo todas as derivadas contínuas. A série de Taylor de $f(x)$, com centro na origem, é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n, \qquad f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \bigg|_{x=0}.$$

a) Mostre que

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + ...$$

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + ...$$

b) Se ϵ é uma variável adimensional e $\epsilon << 1$, mostre que, aproximadamente,

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \epsilon}} \approx 1 \mp \frac{\epsilon}{2}.$$

Questão 25. Exemplo 3.10.

Questão 26. Sejam $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ dois vetores com origem comum, $\bar{\theta}$ o menor ângulo que formam entre si e $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ o vetor relativo. Mostre que o inverso do módulo do vetor relativo pode ser expresso na forma:

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\bar{\theta}) \left[\frac{r\,'}{r}\right]^n,$$

onde P_n são os polinômios de Legendre.

Questão 27. a) Mostre que para uma distribuição contínua de cargas o potencial num ponto $\vec{r}$, fora da distribuição, pode ser expresso na forma:

$$V(\vec{r}) = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int P_n(\cos\bar{\theta})\, r\,'^{\,n}\, dq,$$

onde $\vec{r}\,'$ é o vetor posição do elemento de carga dq e $\bar{\theta}$ o menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$
b) Obtenha a expressão explícita dos termos da série correspondentes a $n = 0$ (monopolo) $n = 1$ (dipolo) $n = 2$ (quadrupolo) e $n = 3$ (octupolo).

Questão 28. Com base nos resultados da questão anterior, mostre que:
a) vetorialmente, o termo de dipolo pode ser expresso na forma

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2}\, \hat{r} \cdot \vec{p},$$

onde

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,' dq$$

é o Momento de Dipolo da Distribuição de Cargas;
b) em coordenadas retangulares, $x \to x_1, y \to x_2, z \to x_3$, o termo de dipolo pode ser expresso na forma

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2} \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r} Q_i,$$

onde

$$Q_i = \int x_i'\, dq, \qquad i = 1, 2, 3$$

são as componentes do Momento de Dipolo da Distribuição de Cargas;
c) em coordenadas retangulares, o termo de quadrupolo pode ser expresso na forma

$$V_{qua}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}\,Q_{ij},$$

onde

$$Q_{ij} = \int [3x_i' x_j' - \delta_{ij} r'^2] dq, \qquad i,j = 1,2,3$$

são as componentes do Momento de Quadrupolo da Distribuição de Cargas;
d) em coordenadas retangulares, o termo de octupolo pode ser expresso na forma

$$V_{oct}(\vec{r}) = \frac{k}{r^4}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}\frac{x_k}{r}\,Q_{ijk},$$

onde

$$Q_{ijk} = \int [x_i' x_j' x_k' - 3r'^2\,\delta_{jk}\,x_i']dq, \qquad i,j,k = 1,2,3$$

são as componentes do Momento de Octupolo da Distribuição de Cargas.

Questão 29. Repita as questões 27 e 28 para o caso de uma distribuição discreta de N cargas puntuais, q_α, $\alpha = 1, 2, 3, ..., N$. Utilize a seguinte notação:

- ponto de observação: $\vec{r}$
- posição carga q_α: $\vec{r}_\alpha^{\,'}$ - coordenadas cartesianas $x_{\alpha_1}^{'}$, $x_{\alpha_2}^{'}$ e $x_{\alpha_3}^{'}$
- menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}_\alpha^{\,'}$: $\bar{\theta}_\alpha$
- vetor relativo: $\vec{\mathscr{r}}_\alpha = \vec{r} - \vec{r}_\alpha^{\,'}$

Questão 30. Problema 3.45.

Questão 31. Problema 3.26.

Questão 32. Problema 3.27.

Questão 33. Problema 3.28.

Questão 34. Problema 3.29

Questão 35. Problema 3.30.

Questão 36. Leia o artigo "Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático e a Definição do Momento de Quadrupolo" de M. Cyrillo e M.J. Menon, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 18, N. 3, 1996, pag. 155.

Questão 37. Explique o que significam um *Dipolo Físico* (ou Dipolo Finito) e um *Dipolo Puro* (ou Dipolo Pontual)?

Questão 38. O potencial de um Dipolo Puro $\vec{p}$ num ponto $\vec{r}$ é, por definição, dado por

$$V_{dip}^{puro}(\vec{r}) = k\,\frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{r^2}.$$

a) Mostre que o campo elétrico correspondente, para qualquer posição do dipolo, é dado por

$$\vec{E}_{dip}^{puro}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3}\,[3(\hat{r}\cdot\vec{p})\hat{r} - \vec{p}].$$

b) Mostre que, em coordenadas esféricas e no caso particular em que $\vec{p} = p\hat{z}$, tem-se

$$\vec{E}_{dip}^{puro}(\vec{r}) = \frac{kp}{r^3}\,[2\cos\theta\hat{r} + sen\ \theta\hat{\theta}].$$

Questão 39. Problema 3.31.

Questão 40. Problema 3.32.

Questão 41. Problema 3.33.

Questão 42. Mostre que se o Momento de Monopolo de uma distribuição de cargas for nulo, o Momento de Dipolo da distribuição independe da posição da origem do sistema de coordenadas.

Questão 43. Considere um sistema de 4 cargas puntuais, duas de valores $+q$, coordenadas l e $-l$ no eixo y e duas de valores $-q$, coordenadas l e $-l$ no eixo z.
a) Determine os termos de monopolo e de dipolo da distribuição.
b) Mostre que a representação matricial do momento de quadrupolo da distribuição é dada por

$$Q_{ij} = 6ql^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Mostre que, em coordenadas esféricas, o termo de quadrupolo é dado por

$$V_{qua}(\vec{r}) = k\,\frac{3ql^2}{r^3}\,[\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi - \cos^2\theta].$$

.....