F415 - MECÂNICA GERAL II

Turma C 1º Semestre - 2014 Márcio José Menon

4. DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS - TENSORES

• ÍNDICE

Introdução
A. Conceitos Básicos
B. Tensores
C. Tensor Momento de Inércia
D. Rotação de um Corpo Rígido

Introdução

A. Conceitos Básicos
A.1 Conceito Elementar de Momento de Inércia
A.1.1 Rotações em Torno de um Eixo de Simetria
a) Uma Partícula
b) Sistema Rígido de Partículas
c) Distribuições Contínuas de Massa
A.1.2 Algo Está Faltando
A.2 Tópicos de Álgebra Linear - Revisão
A.2.1 Matrizes - Propriedades Básicas e Notações
A.2.2 Transformação Linear
A.2.3 Representações Matriciais de Vetores e de Transformações Lineares
A.2.4 Autovalores e Autovetores
A.2.5 Determinação de Autovalores e Autovetores - Diagonalização
a) Objetivos e Notação
b) Procedimento Geral
c) Exemplos

B. Tensores (Cartesianos)
B.1 Conceitos de Vetor
B.1.1 Representações Elementar e Algébrica
B.1.2 Transformação de Coordenadas
B.2 Transformações Ortogonais
B.2.1 Rotação do Sistema de Coordenadas no Plano - Matriz de Rotação
B.2.2 Condição de Ortogonalidade - Matriz Ortogonal
B.2.3 Generalização para Três ou Mais Dimensões
B.3 Tensores
B.3.1 Definições de Escalares e Vetores Via Transformação de Coordenadas
a) Bases Ortogonais
b) Bases Não-Ortogonais (informação)

B.3.2 Definição de Operadores Via Transformação de Coordenadas
a) Motivação Física e “Ordenação”
b) Lei de Transformação
- Objetivo
- Matrizes
- Elementos de Matriz

B.3.3 Tensores de Ordem N
a) Bases Ortogonais
- Generalizações
- Definições Formais

b) Bases Não-Ortogonais (informação)

C. Tensor Momento de Inércia

C.1 Relação Geral entre Momento Angular e Velocidade Angular
C.2 Representação Matricial do Momento de Inércia
C.3 Momentos de Inércia e Produtos de Inércia
a) Uma Partícula
b) Corpo Rígido
C.4 Expressão Geral dos Elementos de Matriz em Coordenadas Retangulares
a) Uma Partícula
b) Corpo Rígido (Discreto)
c) Corpo Rígido (Contínuo)
C.5 Definição Formal de Tensor Momento de Inércia - Transformação de Coordenadas
C.5.1 Tensores de Ordem 1 e 2
C.5.2 Tensor Momento de Inércia
C.6 Eixos Principais de Inércia e Momentos Principais de Inércia
C.6.1 Conceitos e Definições
C.6.2 Propriedades de Simetria
C.6.3 Diagonalização
C.6.4 Exemplos
C.6.5 Comentários

D. Rotação de um Corpo Rígido

D.1 Ângulos de Euler
D.1.1 Matriz de Rotação
D.1.2 Definição dos Ângulos de Euler
D.2 Eixos Principais e Equações de Euler
D.2.1 Conceito e Objetivos
D.2.2 Equações de Euler
D.2.3 Exemplos e Aplicações

Referências

- Marion-Thornton: Cap. 11 (também Cap. 1, seções 1.3 a 1.8).
- N.A. Lemos, Mecânica Analítica (1a edição, 2004), Capítulos 3 e 4.
- “Álgebra Linear”, por exemplo, Hoffmann-Kunze e/ou S. Lang e/ou S. Lipschutz.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

A. Conceitos Básicos

Questão 1

a) Reveja o conceito e definição de *Momento de Inércia*, como introduzido nos livros de Mecânica do curso básico (Física I). Para tanto, considere inicialmente o movimento de uma partícula em rotação em torno de um eixo fixo e estude a expressão de sua energia cinética, identificando o termo correspondente ao momento de inércia. Em seguida, generalize o estudo para um sistema de partículas e um corpo rígido, mostrando que, no caso de uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia em relação a um eixo de rotação que passa pelo corpo é dado por

$$I_e = \int [r^e]^2 dm,$$

onde r^e é a distância do elemento de massa dm ao eixo de rotação.

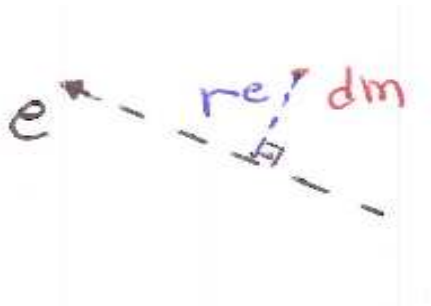

Figura 1: Questão 1.

b) Com base na fórmula acima, determine o momento de inércia nos seguintes casos:
b1) Anel circular de raio R e massa M em relação a um eixo perpendicular ao plano do anel e que passa pelo seu centro.
Resposta: $I_e = MR^2$.
b2) Esfera sólida, uniforme, de raio R e massa M, em relação a um eixo que passa pelo seu centro.
Resposta: $I_e = \frac{2}{5}MR^2$.
b3) Casca esférica, massa M, raio R em relação a qualquer diâmetro.
Resposta: $I_e = \frac{2}{3}MR^2$.

Questão 2

Encontre o seu "caderno velho" de Álgebra Linear ou escolha um livro texto sobre o assunto e reveja os conceitos, definições e propriedades associadas a autovetores, autovalores e diagonalização de matrizes.

Questão 3

Seja uma base ortonormal $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\}$ de um espaço vetorial V de dimensão n. Explique como são estabelecidas as representações matriciais de vetores de V e de transformações lineares de V em V (operadores).

Questão 4
a) Dê as definições de autovetor e de autovalor de uma transformação linear.
b) Qual propriedade geométrica caracteriza o efeito de uma transformação linear em seus autovetores?
c) Mostre que todo múltiplo de um autovetor é também autovetor da transformação linear, com o mesmo autovalor.

Questão 5
Mostre que numa base constituída de autovetores de uma transformação linear, a representação matricial da transformação é diagonal.

Questão 6
Seguindo o procedimento discutido em aula, determine os autovalores e autovetores das seguintes representações matriciais:
a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Resposta: λ_1 = 5, $\vec{v}^1 = a[\hat{x}_1 + \hat{x}_2]$, λ_2 = -1, $\vec{v}^2 = b[\hat{x}_1 - \frac{1}{2}\hat{x}_2]$.
b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Resposta: λ_1 = λ_2 =-2, $\vec{v}^{12} = a\hat{x}_1 + b\hat{x}_2 + (b-a)\hat{x}_3$, λ_3 = 4, $\vec{v}^3 = c[\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3]$.

B. Tensores

Questão 7
Dê a definição dos cossenos diretores de um vetor $\vec{r}$ em relação a um sistema ortogonal de coordenadas x_i, $i = 1, 2, 3$.

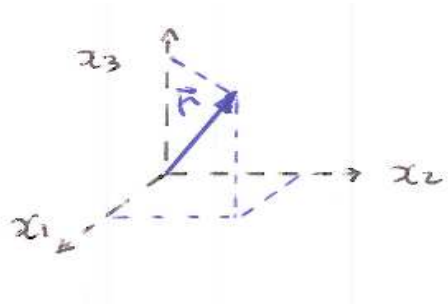

Figura 2: Questão 7.

Questão 8
Considere uma rotação dos eixos coordenados x_1x_2 para $x_1^{'}x_2^{'}$, de um ângulo θ, conforme indicado a seguir.

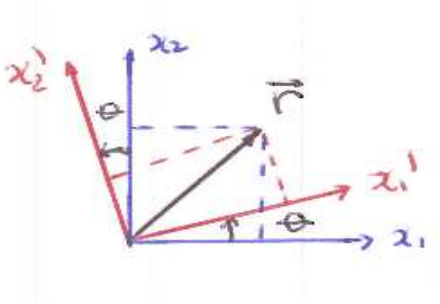

Figura 3: Questão 8.

a) Obtenha a expressão dos versores $\hat{x}_1^{'}$ e $\hat{x}_2^{'}$ em função dos versores $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$. Mostre que a matriz de rotação é dada por:

$$\Lambda_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

b) Expresse os versores $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ em termos dos versores $\hat{x}_1^{'}$ e $\hat{x}_2^{'}$ e mostre que a matriz de rotação é Λ_θ^t (t indica a matriz transposta).
c) Repita os ítens (a) e (b) para as componentes do vetor $\vec{r}$ nas duas bases:

$$\vec{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 = x_1^{'}\hat{x}_1^{'} + x_2^{'}\hat{x}_2^{'}.$$

Compare os resultados com os obtidos nor ítens (a) e (b).

Questão 9

No caso da questão anterior, mostre que os elementos λ_{ij} da matriz de rotação $\Lambda_\theta = (\lambda_{ij})$ podem ser expressos por

$$\lambda_{ij} = \cos\,(\hat{x}_i^{'}, \hat{x}_j) = \frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, 2.$$

Questão 10

Mostre que a ortogonalidade das bases $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ e $\{\hat{x}_1^{'}, \hat{x}_2^{'}\}$ implica na seguinte relação para os elementos da matriz de rotação (*condição de ortogonalidade*):

$$\sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik} \qquad i, k = 1, 2.$$

Questão 11

Considere um produto de matrizes 2×2, $C = AB$. Em termos dos *elementos de matriz* correspondentes esse produto é expresso por

$$C_{ik} = \sum_{l=1}^{2} A_{il}B_{lk} \qquad i, k = 1, 2.$$

Mostre que a *condição de ortogonalidade* da questão anterior, em forma matricial, é dada por:

$$\Lambda^t = \Lambda^{-1}.$$

Questão 12

Discuta as generalizações dos resultados das questões 8 a 11 no caso de 3 ou mais dimensões, explicando o que muda em termos de símbolos matemáticos.

Questão 13

a) Consulte o Cap. 1 do Thornton e Marion (Secs. 1.2 e 1.3) e reveja os conceitos e propriedades associadas à definição de escalares e vetores via transformação de coordenadas.
b) Dê as definições formais de escalares e de vetores em termos de uma transformação de coordenadas (bases ortogonais).

Questão 14

Considere a transformação de coordenadas da questão 8,

$$\Lambda_\theta = (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Com base na definição de vetor da questão anterior, verifique se os seguintes pares ordenados obedecem à definição:
a) $(V_1, V_2) = (-x_2, x_1)$.
b) $(V_1, V_2) = (x_1, -x_2)$.

Questão 15

Com base na definição de vetor da questão 13, verifique se as seguintes ternas ordenadas obedecem à definição:
a) (dx_1, dx_2, dx_3) - deslocamento infinitesimal.
b) $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt})$ - velocidade.
c) $(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3})$, onde ϕ é um escalar - gradiente de ϕ.
d) $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ - operador Nabla (ou Del).

Questão 16

Considere a transformação linear,

$$B_i = \sum_{j=1}^{3} V_{ij} A_j \qquad i = 1, 2, 3,$$

onde B_i, A_j e V_{ij}, $j = 1, 2, 3$ são funções das coordenadas x_k, $k = 1, 2, 3$. Se numa transformação de coordenadas,

$$x_j \;\rightarrow\; x_i^{'} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j, \qquad \lambda_{ij} = \frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_j},$$

as componentes B_i e A_j transformam-se como as componentes de um vetor, mostre que, nessa transformação, os coeficientes V_{ij} transformam-se como:

$$V_{ij}^{'} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \lambda_{ik} \lambda_{jl} V_{kl}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

Questão 17

Considerando uma transformação de coordenadas ortogonais (cartesianas), dê as seguintes definições:
a) Tensor de ordem zero.
b) Tensor de ordem um.
c) Tensor de ordem dois.

C. Tensor Momento de Inércia

Questão 18

Uma partícula realiza movimento circular uniforme com velocidade angular $\vec{\omega}$, em relação a um sistema inercial, origem O, nos dois casos indicados abaixo.

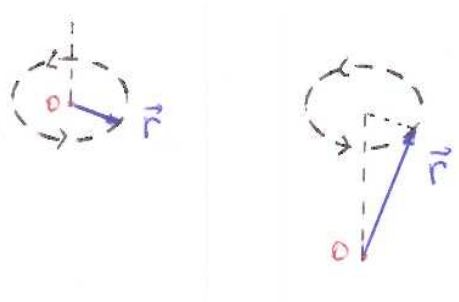

Figura 4: Questão 18.

Considerando os dois casos, responda às seguintes questões:
a) Obtenha as relações entre $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$, indicando na figura a direção e sentido de $\vec{\omega}$.
b) Determine o módulo, direção e sentido do momento angular $\vec{L}$ da partícula em relação à origem O, indicando sua direção e sentido na figura.
c) O momento angular $\vec{L}$ é constante? Explique.

Questão 19

Considere um corpo como um sistema rígido de N elementos, cada um com massa m_α, vetor posição $\vec{r}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., N$ em relação a um referencial inercial, com origem O no

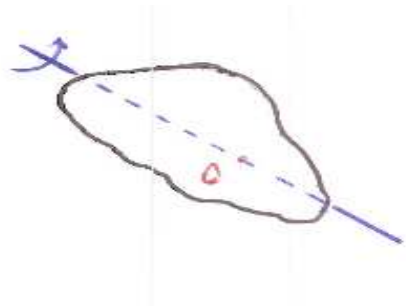

Figura 5: Questão 19.

interior do corpo. O corpo realiza rotação com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um eixo que passa pela origem O.
a) A partir da definição de momento angular para um dos elementos de massa m_α, em relação ao ponto O, determine a *relação vetorial geral* entre o momento angular total do corpo, $\vec{L}$, e a velocidade angular $\vec{\omega}$.
b) Utilizando coordenadas retangulares, $x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, x_{\alpha,3}$, $\alpha = 1, 2, ..., N$, expresse a resposta do ítem anterior em termos das componentes retangulares de $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ e de $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Note que são 3 relações escalares.
c) Expresse a resposta do ítem anterior em termos de representações matriciais.

Questão 20

A representação matricial da questão anterior (ítem c) tem a forma de um produto de matrizes,

$$L = I\omega,$$

sendo L uma matriz 3×1, I uma matriz 3×3 e ω um matriz 3×1, de modo que, em termos dos elementos de matriz, o produto matricial é expresso por:

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Com relação à matriz I, responda as seguintes questões:
a) Explique o significado físico (geométrico) dos elementos diagonais, justificando a denominação *momentos de inércia*.
b) Como são denominados os elementos não diagonais? Por que recebem a denominação?
c) Qual a propriedade notável dos elementos não diagonais?

Questão 21

Com relação à questão anterior:
a) Obtenha a expressão geral dos elementos de matriz I_{ij} em coordenadas retangulares.
b) Com base na resposta do ítem anterior e considerando o limite para uma distribuição contínua de massa, com densidade volumétrica genérica $\rho(\vec{r})$, mostre que os elementos de matriz são dados por

$$I_{ij} = \int\int\int \rho(\vec{r})\, [\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j]\, dV,$$

onde $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Questão 22

Determine a representação matricial do momento de inércia de um cubo homogêneo de massa m, aresta l, em relação a um de seus vértices (O).

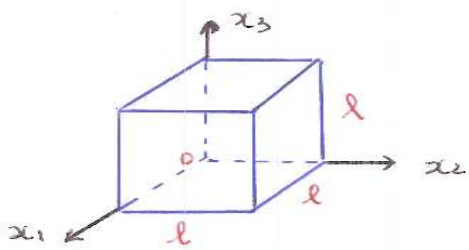

Figura 6: Questão 22.

Resposta

$$I = ml^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Questão 23

a) Determine a representação matricial do momento de inércia de uma esfera maciça, homogênea, de massa M, raio R, em relação ao seu centro de massa. Utilize a expressão da questão 21 e a transformação para coordenadas esféricas:

$$x_1 = x = r\,\text{sen}\theta\,\cos\phi$$
$$x_2 = y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi$$
$$x_3 = z = r\,\cos\theta.$$

b) Compare o resultado com o obtido na questão 1, ítem (b) e explique a "diferença".

Resposta:

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questão 24

Determine a representação matricial do momento de inércia de uma placa quadrada, homogênea, de massa M, lado a, em relação a um de seus vértices (O).

Resposta:

$$I = ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

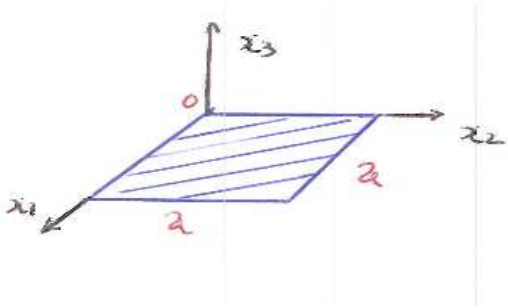

Figura 7: Questão 24.

Questão 25

Considere um corpo rígido representado por um sistema de n partículas de massas m_α e vetores posição $\vec{r}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., n$ em relação à origem O de um referencial inercial. Considere também que o corpo tem uma velocidade angular instantânea $\vec{\omega}$ em torno de um ponto P do corpo, o qual possui velocidade linear $\vec{V}$ em relação ao sistema inercial. Responda às seguintes questões (Thornton-Marion, Sec. 11.3):

a) Mostre que a energia cinética total do corpo é dada por

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha V^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{V}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)^2.$$

b) Mostre que se $\vec{r}_\alpha$ é medido *em relação ao centro de massa* do corpo, a energia cinética pode ser separada em dois termos, associados aos movimentos de translação (tra) e de rotação (rot):

$$T = T_{tra} + T_{rot},$$

onde

$$T_{tra} = \frac{1}{2}MV^2, \qquad M = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)^2.$$

c) Escrevendo $\vec{\omega}$ e $\vec{r}_\alpha$ em componentes retangulares,

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_1\hat{x}_1 + \omega_2\hat{x}_2 + \omega_3\hat{x}_3\\ \vec{r}_\alpha &= x_{\alpha,1}\hat{x}_1 + x_{\alpha,2}\hat{x}_2 + x_{\alpha,3}\hat{x}_3\end{aligned}$$

mostre que pode-se expressar

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j,$$

onde

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha [\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}].$$

Compare este resultado com o obtido na questão 21 (ítem (a)).

Questão 26

Mostre que as componentes do momento de inércia de um corpo rígido (elementos de matriz) obedecem as propriedades de transformação de coordenadas que definem as *componentes de um tensor de ordem 2* (utilize o mesmo procedimento da questão 16):

$$I'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

Comentários:

Por obedecer a essa propriedade o momento de inércia é denominado *Tensor Momento de Inércia* e na notação padrão de tensores, dependendo do autor, constuma-se expressá-lo como

$$\{\vec{I}\} \qquad \text{ou} \qquad \overleftrightarrow{I}$$

Os resultados das questões 19 e 20 para o momento angular e da questão 25 para a energia cinética de rotação são expressos, em *notação tensorial* (vetorial), por (Marion-Thornton, sec. 11.4, Lemos sec. 4.2 e 4.3)

$$\vec{L} = \{\vec{I}\} \cdot \vec{\omega} \qquad \text{ou} \qquad \vec{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \{\vec{I}\} \cdot \vec{\omega} \qquad \text{ou} \qquad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$$

Observe que as posições dos vetores e do tensor de ordem 2 são consistentes com os produtos de matrizes (número de colunas à esquerda igual ao número de linhas à direita).

Os tensores têm amplas aplicações em várias áreas da Física, destacando-se nos cursos de graduação, além do *Tensor de Inércia*, os *Tensores de Quádrupolo e Octupolo* na expansão do potencial eletrostático e o *Tensor de Maxwell*, no eletromagnetismo.

Alguns aspectos sobre a definição do Tensor de Quadrupolo e características da expansão multipolar são discutidos no artigo de M. Cyrillo e M.J. Menon: ”Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático e a Definição do Momento de Quadrupolo”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 18, N. 3 (1996), p. 155.

Questão 27

a) Explique o que são *Eixos Principais de Inércia* e *Momentos Principais de Inércia*.

b) Mostre que se um corpo gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno de um de seus eixos principais de inércia, então seu momento angular $\vec{L}$ é paralelo a $\vec{\omega}$.

Questão 28

O que significa dizer que um corpo é simétrico em relação a:
a) um ponto?
b) um eixo?
c) um plano?

Questão 29

Demonstre as seguintes propriedades de simetria:
a) Se um corpo for simétrico em relação a um eixo, esse eixo é um eixo principal de inércia.
b) Qualquer plano de simetria de um corpo é perpendicular a um eixo principal de inércia.

Questão 30

Explique como determinar formalmente os eixos peincipais numa abordagem algébrica. Qual o procedimento geral?

Questão 31

Utilizando o algorítmo para quocientes de polinomios, determine:

$$P(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}.$$

Resposta: $P(x) = x^2 + x - 2$.

Questão 32

Utilizando a abordagem algébrica, determine os eixos principais de inércia do cubo da quastão 22. Obtenha a representação matricial do momento de inércia em relação a esses eixos.

Resposta:

$$I = \frac{1}{6}ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/2 & 0 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}$$

Questão 33

Considere dois referenciais, um com origem em Q, eixos X_1, X_2, X_3 e outro com origem em O, eixos x_1, x_2, x_3, mutuamente paralelos aos primeiros. Seja $\vec{a}$ o vetor posição de O em relação a Q.

Para um dado corpo rígido, os elementos do momento de inércia em relação à base $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3\}$ são, como vimos, expressos por

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \Delta m_\alpha [\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} X_{\alpha,k}^2 - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j}].$$

Mostre que em relação à base $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ os elementos são dados por:

$$J_{ij} = I_{ij} - M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j),$$

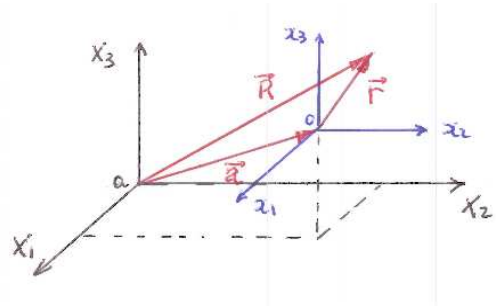

Figura 8: Questão 33.

onde

$$M = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \qquad \text{e} \qquad a^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2$$

Essa é a expressão geral do *Teorema dos Eixos Paralelos*.

Questão 34

a) Determine a representação matricial do momento de inércia de um cubo de aresta l, massa m (questões 22 e 31), em relaçao a um sistema de coordenadas com origem no centro de massa do cubo e eixos paralelos aos lados do cubo.

Resposta:

$$(J_{ij}) = \frac{1}{6} m l^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Marion-Thornton Exemplo 11.7.

Questão 35

Faça um resumo dos resultados obtidos para o cubo nas questões 22, 32 e 34 e discuta as diferenças, de acordo com as interpretações físicas e geométricas.

D. Rotação de um Corpo Rígido

Questão 36

a) Reveja as propriedades básicas das Matrizes de Transformação (Thornton-Marion Sec. 1.7).

b) Determine as matrizes de transformação nos seguintes casos:

b1) rotação de 90° em torno do eixo x_3 no sentido anti-horário.

b2) rotação de 90° em torno do eixo x_1 no sentido anti-horário.

b3) a matriz resultante da aplicação sucessiva das duas rotações anteriores. Resposta:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questão 37
a) Discuta o estabelecimento da orientação de um sistema de corpo (fixo num corpo rígido) em relação a um sistema inercial, através de rotações.
b) Dê a definição padrão dos *Ângulos de Euler* Φ, θ, Ψ e obtenha, em cada caso, a matriz de rotação correspondente.
c) Determine a matriz resultante da aplicação sucessiva das 3 rotações do ítem anterior.

Questão 38
Thornton-Marion, Exemplo 11.9.

Questão 39
A equação de movimento para a rotação de um corpo rígido, em relação a um referencial inercial, é dada por

$$\left[\frac{d\vec{L}}{dt}\right]_i = \vec{N}.$$

Mostre que em relação aos eixos principais de inércia de um corpo com velocidade angular $\vec{\omega}$, a equação acima possui componentes retangulares (*Equações de Euler*):

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= N_3, \end{aligned}$$

onde I_i, $i = 1, 2, 3$ são os momentos principais de inércia do corpo.

Questão 40
Thornton-Marion, Exemplo 11.10.

Questão 41
(Lemos, Exemplo 4.8.1) "Um prato de plástico é arremessado quase horizontalmente para o ar, de tal modo que o prato gira ao mesmo tempo em que seu plano oscila. Descrever o movimento de rotação do prato e mostrar que as oscilações são duas vezes mais rápidas do que a rotação do prato em torno do seu próprio eixo de simetria."

Questão 42
(Lemos, Exemplo 4.8.2) "Mostrar que só é estável a rotação uniforme em torno dos eixos principais de inércia de maior ou menor momento de inércia."

Questão 43
Leia as seguintes Seções do Thornton-Marion:
a) Sec. 11.10 Pião Simétrico sem Força Externa.
b) Sec. 11.11 Pião Simétrico com Ponto Fixo.
c) Sec. 11.10 Estabilidade de Rotações de Corpos Rígidos.