F415 - MECÂNICA GERAL II

Turma C 1º Semestre - 2014 Márcio José Menon

5. OSCILADORES ACOPLADOS - LIMITE PARA O CONTÍNUO - ONDAS

- **ÍNDICE**

C.2.3 Corda Fixa nas Duas Extremidades
- Modos e Frequências Normais de Oscilação
- Configurações
- Solução Geral
- Condições Iniciais (Método de Fourier)
- Resumo
- Sequência Harmônica e Escala Musical

D. Propagação de Ondas

D.1 Soluções Reais e Complexas

D.2 Fase, Frente de Onda, Velocidade de Fase

D.3 Solução Geral

D.4 Velocidade de Grupo e Pacote de Onda

D.4.1 Superposição Discreta de Ondas - Batimentos
- Superposição de Duas Ondas
- Velocidade de Grupo
- Superposição de N Ondas

D.4.2 Limite para o Continuo: Distribuição Espectral e Pacote de Onda
- Limite $N \to \infty$
- Pacote de Ondas e Distribuição Espectral

• Referências

- Marion-Thornton, Capítulo 12 - Oscilações Acopladas e Capítulo 13 Sistemas Contínuos; Ondas.

- M.J. Menon, *Uma Revisão sobre Osciladores Harmônicos Acoplados e o Limite para a Corda Elástica*, manuscrito, pasta F415C, BIF.

- F.S. Crawford, *Waves - Berkeley Physics Course*, Vol. 3 (McGraw-Hill, 1965), Capítulos 1, 2 e 3.

- Symon, Seções 4.10, 8.4 e 8.5.

• **QUESTÕES PROPOSTAS**

A. Osciladores Acoplados

Questão 1
a) Explique o que significa *número de graus de liberdade* de um sistema e dê alguns exemplos.
b) Qual o número de graus de liberdade de um pêndulo plano de comprimento l? Explique.

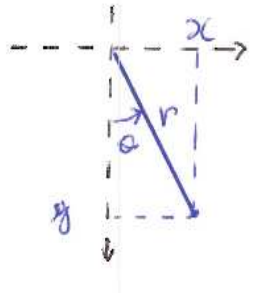

Figura 1: Questão 1.

Questão 2
Considere oscilações livres unidimensionais de uma partícula de massa m, ligada a uma mola de constante elástica k (extremidade fixa).
a) Explique o que é *modo normal de oscilação* do sistema (1 grau de liberdade).
b) Determine o modo normal de oscilação do sistema.

Questão 3
Considere uma partícula de massa m, ligada a duas molas de constantes elásticas k, de acordo com o esquema abaixo.

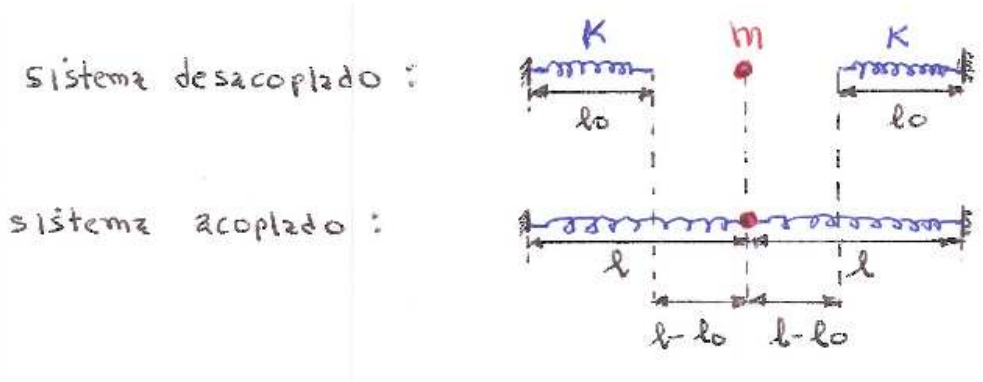

Figura 2: Questão 3.

Seja ψ o deslocamento unidimensional da massa m, em relação à posição de equilíbrio acoplado, na horizontal (oscilações longitudinais), ou na vertical (oscilações transversais).

a) Mostre que, para oscilações hamônicas longitudinais, o modo normal de oscilação do sistema é dado por:

$$\psi(t) = A\cos\,(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

b) Mostre que para oscilações harmônicas transversais, tem-se os seguintes modos normais de oscilação para *cada aproximação considerada*:

- Pequenas oscilações:

$$\psi(t) = A\cos\,(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)}.$$

- Grande elasticidade:

$$\psi(t) = A\cos\,(\omega t + \phi), \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

c) Faça um resumo dos resultados obtidos nas questões 2 e 3. Quais características podem ser inferidas desses resultados? Qual a conclusão?

Questão 4

Considere um sistema com dois graus de liberdade, por exemplo, duas partículas ligadas por três molas.

a) Explique o que significa *modos normais de oscilação do sistema*. Não é necessário resolver nenhuma equação diferencial, apenas discuta o conceito e as características que definem os modos normais. Especificamente, por que considera-se soluções para as quais as partículas oscilam com a mesma frequência e fase inicial?

b) Discuta/explique o método geral para obtenção dos modos normais de oscilação de sistemas com dois graus de liberdade (6 "passos").

Questão 5

Considere oscilações longitudinais de duas partículas ligadas por três molas:

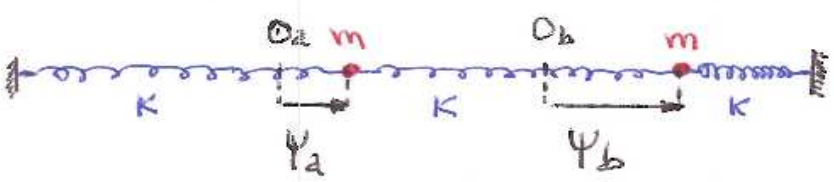

Figura 3: Questão 5.

a) Obtenha as equações de movimento, considerando as coordenadas indicadas na figura (posições iniciais $\psi_b > \psi_a$).

b) Desacople o sistema de equações através de coordenadas normais: $\psi_a(t)+\psi_b(t)$ e $\psi_a(t)-\psi_b(t)$. Qual a interpretação física (cinemática) dessas coordenadas?
c) A partir do ítem anterior, mostre que as frequências normais de oscilação são:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Questão 6
a) Para o sistema da questão anterior, determine os modos normais de oscilação e as configurações em cada modo.
b) Discuta de forma esquemática os movimentos associados a cada modo. Quais condições iniciais determinam cada modo?
c) O fato de $\omega_2 > \omega_1$ teria algo a ver com o tipo de movimento em cada modo?

Questão 7
No caso das questões 5 e 6, seja k_{12} a constante da mola central (acoplamento) e k a constante das molas à esquerda e à direta. Com base nas seções 12.2 (oscilações acopladas) e 12.3 (acoplamento fraco) do Thornton e Marion, estude as soluções e interpretações físicas do problema de oscilações longitudinais. Você acertou a resposta do ítem c da questão anterior?

Questão 8
Considere oscilações <u>transversais</u> de um sistema com dois graus de liberdade (2 partículas de massas m ligadas a 3 molas de constantes k), de acordo com o esquema:

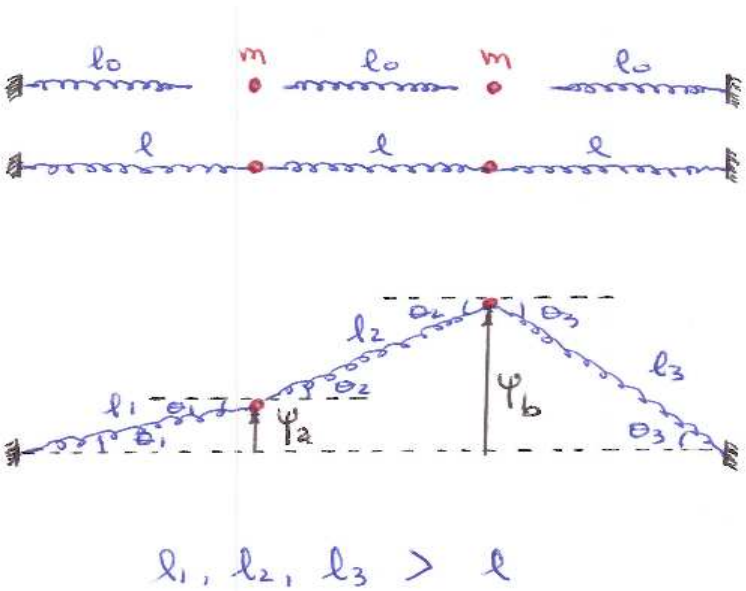

Figura 4: Questão 8.

Considerando a aproximação de grande elasticidade e utilizando o método geral da questão 4:
a) Determine as equações de movimento.
b) Determine os modos normais de oscilação do sistema.
c) Discuta, de forma esquemática, o tipo de movimento associado a cada modo normal. Qual tipo de condição inicial determina o movimento em cada um dos modos?
d) Determine a equação correpondente ao movimento geral do sitema.

Questão 9

Três partículas de mesma massa, m são ligadas por quatro molas de mesma constante elástica, k:

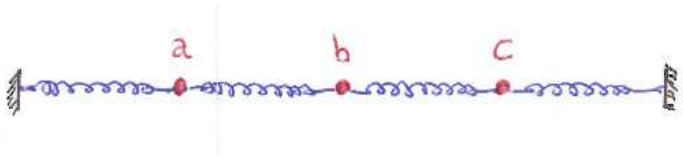

Figura 5: Questão 9.

Considerando oscilações longitudinais, com deslocamentos iniciais $\psi_a > \psi_b > \psi_c$, determine:
a) As frequências normais de oscilação.
b) A configuração de cada modo normal.
c) Explique, esquematicamente, os movimentos associados a cada modo.

Respostas dos ítens a e b:
Modo 1:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})\,k}{m}}, \qquad \psi_{b,1} = \sqrt{2}\,\psi_{a,1}, \qquad \psi_{c,1} = \psi_{a,1};$$

Modo 2:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \psi_{b,2} = 0, \quad \psi_{c,2} = -\psi_{a,2};$$

Modo 3:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})\,k}{m}}, \qquad \psi_{b,3} = -\sqrt{2}\,\psi_{a,3}, \quad \psi_{c,3} = \psi_{a,3}.$$

Questão 10

No sistema indicado na figura 6, cada mola possui constante elástica k, l_0 é o comprimento de cada mola na posição relaxada e l o comprimento na posição de equilíbrio horizontal. Considerando a aproximação de grande elasticidade determine:
a) os modos normais de oscilação do sitema.

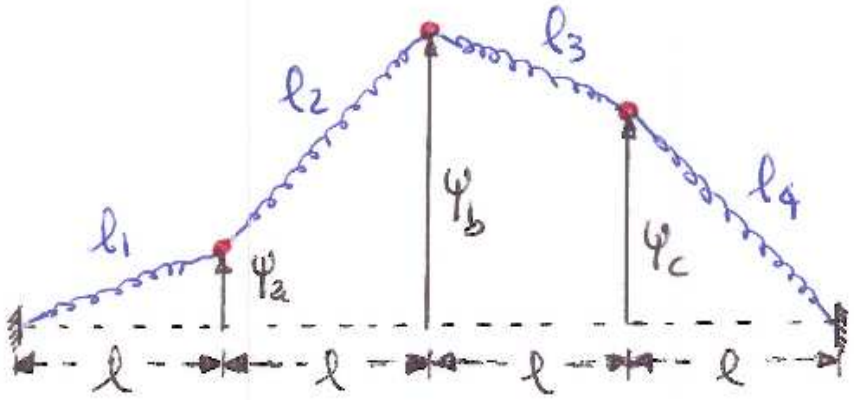

Figura 6: Questão 10.

b) a configuração de cada modo normal, explicando, esquematicamente, os movimentos associados a cada modo normal.

Resposta: mesmos modos normais e configurações da questão 9.

Questão 11

a) Com base nas respostas das questões anteriores, discuta os modos normais de oscilação de sistema com N graus de liberdade ($N > 3$). Faça esquemas dos movimentos característicos dos modos normais para $N = 4, 5, 6,...$

b) O que é qualitativamente esperado para $N \to \infty$?

Questão 12

a) Estude a Seção 12.4 (Problema Geral de Oscilações) do Thornton e Marion.

b) Exemplo 12.1 do Thornton e Marion.

B. Meios Contínuos - Equação de Onda

Questão 13

Seja $\psi(x,t)$ a função de onda de uma corda elástica oscilante com as duas extremidades fixas e um ponto da corda de abscissa x_0. Discuta os significados físicos e geométricos das seguintes grandezas associadas ao movimento:

a) $\psi(x_0,t)$ e $\psi(x,t_0)$; b) $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x_0,t)$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x_0,t)$; c) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x_0,t)$ e $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x_0,t)$.

Questão 14

Seja uma corda elástica com as duas extremidades fixas, de densidade ρ_0 e tensão T_0 na posição de equilíbrio. Considerando a aproximação de pequenas oscilações ou de grande

elasticidade para oscilações transversais, deduza a equação de onda em uma dimensão (equação de D'Alembert):

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}, \qquad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}.$$

Questão 15

Estude deduções equivalentes da equação de onda em uma dimensão apresentadas em Symon, sec 8.1 e Crawford sec. 2.2.

C. Soluções da Equação de Onda

Questão 16

Utilizando o *método de separação de variáveis*, obtenha a solução geral da equação de onda unidimensional (isto é, sem levar em conta condições de contorno ou iniciais).

Resposta:

$$\psi(x,t) = [A_1\cos\omega t + A_2\,\mathrm{sen}\omega t][A_3\cos\frac{\omega x}{c} + A_4\,\mathrm{sen}\frac{\omega x}{c}].$$

Questão 17

Seja l o comprimento da corda elástica das questões 14 e 16 e considere a corda fixa nas duas extremidades ($x = 0$ e $x = l$).

a) Determine os modos normais de oscilação do sistema.

b) Discuta, de forma esquemática, o tipo de movimento associado a cada modo normal.

c) Os resultados acima são consistentes com a análise qualitativa discutida na questão 11, ítem b?

Questão 18

a) Para m e n inteiros, mostre que

$$\int_0^l \mathrm{sen}\frac{m\pi x}{l}\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{2}\delta_{mn}, \qquad \text{onde} \qquad \delta_{mn} = \begin{cases} 0 \text{ se } m \neq n \\ 1 \text{ se } m = n \end{cases}$$

(utilize $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$).

b) Utilizando integração por partes, mostre que

$$\int_{x_1}^{x_2} x\sin kx\,dx = \left[\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x\cos kx}{k}\right]_{x_i}^{x_2}.$$

Questão 19

a) Com base nos resultados da questão 17, obtenha a solução geral para a função de onda $\psi(x,t)$ (superposição dos modos normais de oscilação).

b) Determine a solução específica (formal) para as seguintes condições iniciais:

$$\psi(x,t=0) = \psi_0(x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t=0) = v_o(x).$$

Questão 20

Thornton-Marion, Exemplo 13.1 (utilize notação da questão anterior e resultado do ítem (b) da questão 18).

Questão 21

Discuta os conceitos de *sequência harmônica* e *escala musical*. Consulte: F.S. Crawford, *Waves*, Berkeley Physics Course, Vol. 3, problemas 2.6 e 2.7 (enunciados).

D. Propagação de Ondas

Questão 22

a) Mostre que a solução geral da equação de onda em uma dimensão (questão 13) pode ser expressa na forma:

$$\psi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct).$$

b) Qual o significado físico das funções f e g?

Consulte: Thornton e Marion - Sec. 13.6.

Questão 23

Considere duas ondas harmônicas complexas de mesma amplitude A, frequências ω e $\omega + \Delta\omega$, números de onda k e $k + \Delta k$, sendo $\Delta\omega << \omega$ e $\Delta k << k$.

a) Mostre que a superposição das duas ondas pode ser expressa na forma

$$\psi(x,t) = 2A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right]\cos\left[(k+\frac{\Delta k}{2})x - (\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t\right].$$

b) Interprete fisicamente esse resultado, fazendo um esboço da onda resultante associada (Thornton e Marion Fig. 13.6).

c) Qual a *velocidade de grupo* da onda?

Questão 24

Thornton-Marion, Exemplo 13.3.

Questão 25

a) Considere a superposição de N ondas harmônicas complexas e discuta o limite quando $N \to \infty$.

b) O que é um *pacote de onda*? Como pode ser interpretado? (consulte Thornton-Marion, Sec. 13.9).

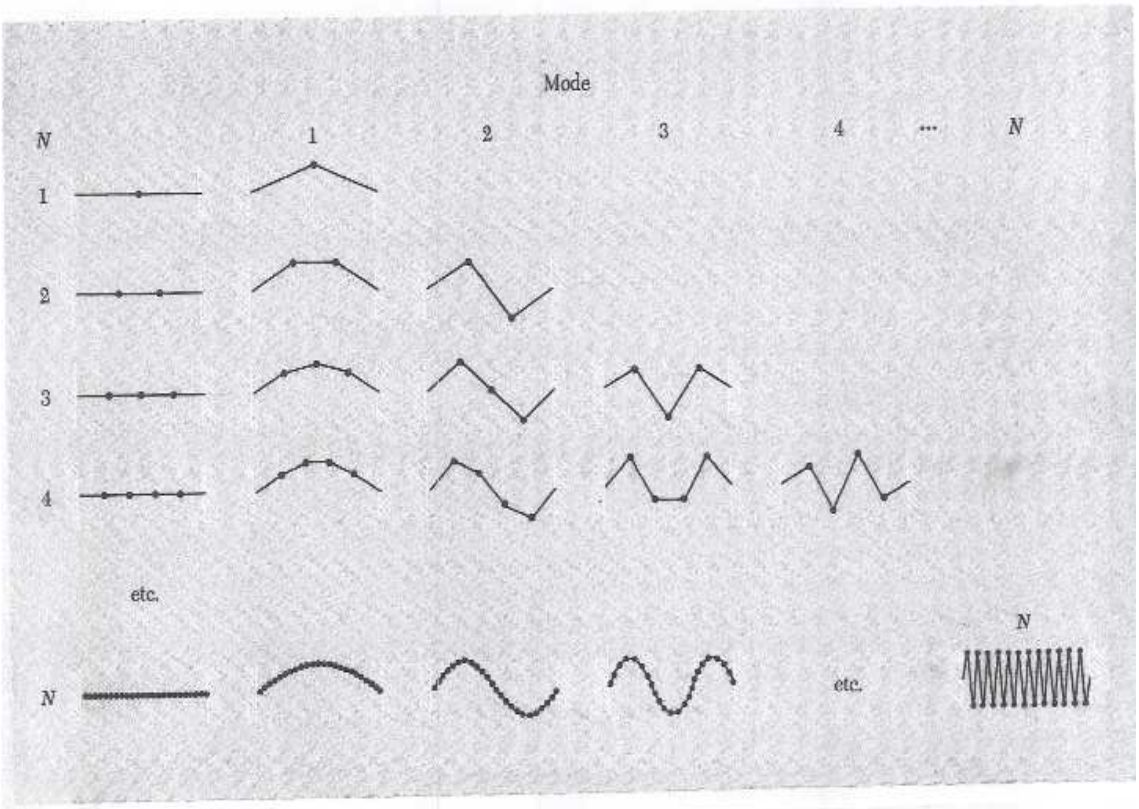

Fig. 2.1 Transverse vibrational modes of a beaded string. A string with N beads has N modes. In mode m the string crosses the equilibrium axis m − 1 times and has m half-wavelengths. The highest frequency mode is the "zig-zag" configuration shown.

Figura 7: F.S. Crawford, *Waves - Berkeley Physics Course*, Vol. 3.