F502 Eletromagnetismo I

Turma A 1º Semestre - 2010 Márcio José Menon

Capítulo 6 MAGNETOSTÁTICA

• ÍNDICE

6.0 Introdução: Panorama Histórico e Plano Geral
6.1 Lei de Força entre Circuitos de Corrente e a Definição de Campo Magnético
6.2 Força de Lorentz
6.3 Divergente e Rotacional do Campo Magnético
6.4 Equações Fundamentais da Eletrostática e Magnetostática no Vácuo
6.5 Potencial Vetorial Magnético
6.6 Resumo

6.0 Introdução: Panorama Histórico e Plano Geral
6.0.1 Breve Panorama Histórico
6.0.2 Comentários e Plano Geral

6.1 Lei de Força entre Circuitos de Corrente e Definição de Campo Magnético
6.1.1 Comentários sobre Leis de Força Gravitacional e Eletrostática
6.1.2 Força entre Circuitos de Correntes Estacionárias Unidimensionais (Filiformes)
a) Resultados Experimentais de Ampère - Notação Vetorial
• Sistema Físico
• Força entre Elementos de Corrente
• Força Resultante entre Circuitos
• Permeabilidade do Espaço Livre
b) Forma Simétrica e Terceira Lei de Newton
• Forma Simétrica
• Lei da Ação e Reação
6.1.3 Conceito e Definição de Campo Magnético Produzido por Correntes
a) Circuito Fonte e Circuito de Prova
b) Campo Magnético (Lei de Biot-Savart)
• Expressão Geral
• Propriedades
c) Exemplos de Cálculo de Campo Magnético
6.1.4 Força sobre Circuito Devida a Campo Magnético
a) Expressão Geral para Correntes Filiformes
b) Proriedades Notáveis
c) Exemplos
6.1.5 Densidades de Correntes Lineares, Superficiais e Volumétricas
a) Força Magnética
b) Campo Magnético
c) Resumo

6.2 Força de Lorentz
6.2.1 Força Magnética sobre Carga Puntual em Movimento
a) Distribuição Contínua de Cargas
b) Distribuição Discreta de Cargas
c) Caso de Uma Carga Pontual
d) Propriedades Notáveis da Força Magnética
e) Exemplos e Aplicações
6.2.2 Força Eletromagnética (Lorentz)
6.2.3 Expressão Geral e Comentários
6.2.4 Exemplos e Aplicações

6.3 Divergente e Rotacional do Campo Magnético
6.3.1 Divergente - Monopólos Magnéticos
a) Forma Diferencial
b) Forma Integral
c) Interpretação Física: Não Existência de Monopolos Magnéticos
6.3.2 Rotacional - Lei de Ampère
a) Forma Diferencial
b) Forma Integral
c) Aplicações no Cálculo do Campo Magnético

6.4 Equações Fundamentais da Eletrostática e Magnetostática no Vácuo
6.4.1 Força de Lorentz
6.4.2 Equações de Maxwell

6.5 Potencial Vetorial Magnético
6.5.1 Conceito e Definição - Calibre de Coulomb
6.5.2 Exemplos de Cálculo do Potencial
6.5.3 Expansão Multipolar do Potencial Magnético
a) Expressão Geral
b) Termo de Dipolo e Momento de Dipolo
6.5.4 Condições de Contorno da Magnetostática
a) Campo Magnético
b) Potencial Vetorial Magnético

6.6 Resumo

• QUESTÕES PROPOSTAS

Os exemplos e problemas indicados, referem-se ao livro texto principal (Griffiths, 3a. edição).

6.1 Lei de Força entre Circuitos de Corrente e a Definição de Campo Magnético

Questão 1. Considere dois circuitos C_1 e C_2 percorridos por correntes estacionárias filiformes I_1, I_2, indicados na figura. Em notação da álgebra vetorial (Gibbs-Heaviside, 1881), os resultados experimentais de Ampère (1820) sobre a força de interação magnética entre elementos/circuitos de corrente podem ser expressos na forma:

$$\vec{F}^{mag}_{1\to 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{\mathscr{r}})}{\mathscr{r}^2},$$

onde $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, μ_0 é a permeabilidade do espaço livre (vácuo) e $\vec{F}^{mag}_{1\to 2}$ é a força magnética que o circuito C_1 exerce no C_2.

a) Mostre que a expressão acima pode ser expressa na forma simétrica em $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$:

$$\vec{F}^{mag}_{1\to 2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2.$$

b) Discuta a lei de ação e reação para forças entre os elementos de corrente e forças resultantes nos circuitos. Em qual caso a lei é obedecida? Justifique a resposta.

Questão 2. Com base nos dados da questão anterior, discuta o conceito e definição de *campo magnético* produzido por um circuito de corrente. Mostre que o campo magnético produzido por um circuito C', de corrente filiforme estacionária I', numa posição $\vec{r}$ do espaço é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \qquad \text{(expressão conhecida como } \textit{Lei de Biot-Savart}\text{)}.$$

onde $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}\,'$.

Questão 3. Utilizando a lei de Biot-Savart, determine o *vetor campo magnético* produzido por um fio retilínio longo (efeitos de borda não considerados), percorrido por uma corrente estacionária filiforme I, a uma distância s do fio (considere coordenadas cilíndricas, s, φ, z). Faça um esboço das linhas de campo.
Resposta: Sendo o eixo z ao longo do fio e no sentido da corrente: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\varphi}$.

Questão 4. Exemplo 5.6.

Questão 5. Mostre que a força resultante sobre um circuito C percorrido por corrente filiforme, estacionária I, submetido a um campo magnético campo $\vec{B}$ é dada por

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Questão 6. Determine a *força por unidade de comprimento* entre dois fios retilínios, *longos*, paralelos, percorridos por correntes filiformes I_1 e I_2, separados por uma distância d. Discuta em quais casos tem-se atração e repulsão. Veja Exemplo 5.5.

Questão 7. Problema 5.4

Questão 8. Mostre que a força devida a um campo magnético $\vec{B}$ aplicado a circuitos com *densidades de corrente* superficial e volumétrica é dada, respectivamente, por:

$$\vec{F}_{mag} \Longrightarrow \qquad \int \vec{K} \times \vec{B}\, da, \qquad \int \vec{J} \times \vec{B}\, d\tau.$$

Questão 9. Obtenha as formas matemáticas da lei de Biot-Savart no caso de *densidades de corrente* superficiais $\vec{K}$ e volumétricas $\vec{J}$.

Questão 10. Considere circuitos com densidades de corrente estacionárias lineares, superficiais e volumétricas. Faça um resumo e discuta as simetrias nas expressões dos campos produzidos por esses circuitos e nas expressões das forças resultantes sobre esses circuitos quando submetidos a um campo magnético.

6.2 Força de Lorentz

Questão 11. A partir da expressão da força sobre uma distribuição continua de cargas em movimento, submetidas a um campo magnético, e considerando o limite do contínuo para o discreto, mostre que para uma distribuição discreta de portadores de cargas q_i, com velocidades $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, 3, ..., N$, submetidos a um campo magnético $\vec{B}$, a força magnética resultante é dada por

$$\vec{F}_{mag} = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \vec{v}_i \times \vec{B}.$$

Questão 12. Justificando a resposta, mostre que a força resultante sobre uma partícula de carga q, velocidade $\vec{v}$, submetida a um campo elétrico $\vec{E}$ e a um campo magnético $\vec{B}$ é dada por

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(Força de Lorentz)}$$

Questão 13. Mostre que a força magnética $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ não realiza trabalho.

Questão 14. Exemplo 5.1.

Questão 15. Exemplo 5.3.

Questão 16. Problema 5.2.

Questão 17. *De Lorentz a Ampère: Voltando no Tempo*
a) Considere a componente magnética da força de Lorentz (1895):

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}.$$

Mostre, em detalhe, que no caso de uma densidade linear de corrente $\vec{I}$, estacionária, num circuito fechado C, submetido a um campo magnético $\vec{B}$, tem-se

$$\vec{F}_m = \oint_C \vec{I} \times \vec{B}\, dl.$$

b) Considerando a expressão do campo magnético produzido por um circuito de corrente estacionária, filiforme, I' (lei de Biot-Savart - questão 2), deduza a lei de força magnética entre dois circuitos de corrente C_1, C_2, percorridos por correntes estacionárias filiformes I_1 e I_2 (Ampère, 1820 - questão 2):

$$\vec{F}^{mag}_{1\to 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{\mathscr{r}})}{\mathscr{r}^2}.$$

6.3 Divergente e Rotacional do Campo Magnético

Questão 18. Reveja a demonstração do seguinte resultado (Questão 24 do Capítulo 2):

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^n} \right] = 0$$

onde $\vec{\nabla}$ atua em $\vec{r}$.

Questão 19. a) A partir da lei de Biot-Savart e considerando o campo magnético produzido por uma corrente estacionária com densidade volumétrica $\vec{J}$, mostre que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

b) Obtenha a forma integral correspondente à equação acima e interprete fisicamente o resultado.

Questão 20. a) Reveja a dedução dos seguintes resultados, tratados no Capítulo 1:

$$\int \vec{V}(\vec{r}\,')\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d\tau' = \vec{V}(\vec{r}), \qquad \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right] = 4\pi\delta^3(\vec{\mathscr{r}}), \quad \vec{\mathscr{r}} = \vec{r}-\vec{r}\,'$$

b) Denotando

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{\nabla} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial z'}\right) = \vec{\nabla}\,',$$

mostre que para um campo escalar f, função de $\vec{r}-\vec{r}\,'$:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\vec{\nabla}\,' f(\vec{r}-\vec{r}\,').$$

Questão 21. a) A partir da lei de Biot-Savart e considerando o campo magnético produzido por uma corrente estacionária com densidade volumétrica $\vec{J}$, mostre que

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \qquad \text{(Lei de Ampère)}.$$

b) Obtenha a forma integral correspondente a esse resultado.

Questão 22. Exemplo 5.8.

Questão 23. Exemplo 5.9

Questão 24. Exemplo 5.10

Questão 25. Problema 5.13

6.4 Equações Fundamentais da Eletrostática e Magnetostática no Vácuo

Questão 26. Escreva as cinco equações básicas e fundamentais da Eletrostática e da Magnetostática. Explique o significado físico de cada uma.

6.5 Potencial Vetorial Magnético

Questão 27. a) Explique a origem da associação de um *potencial vetorial magnético* $\vec{A}$ a um campo magnético $\vec{B}$. Dado o potencial o campo é univocamente determinado? Explique.
b) O que significa *calibre de Coulomb*?

Questão 28. a) Mostre que no calibre de Coulomb, o potencial magnético obedece à equação de Poisson na forma:

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}.$$

b) Discutindo a analogia com o caso eletrostático (equação de Poisson e expressão integral para $V(\vec{r})$), mostre que o potencial vetorial magnético pode ser expresso por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}}\, d\tau\,'.$$

c) O potencial vetorial magnético pode ter associado uma energia potencial eletrostática? Explique.

Questão 29. Problema 5.22.

Questão 30. Exemplo 5.11.

Questão 31. a) Mostre que o potencial vetorial magnético num ponto $\vec{r}$ possui expansão multipolar na forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint r'^n P_n(\cos\,\bar{\theta}) d\vec{l}\,',$$

onde $\bar{\theta}$ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$. b) Essa expansão possui termo de monopolo? Explique.

Questão 32. Esta questão é baseada nos Problemas 1.60 e 1.61, ítem e (Capítulo 1) e é preparatória para a questão 33. Considere as seguintes identidades vetoriais:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{V} \cdot d\vec{l} \qquad \text{(Teorema de Stokes)}$$

$$\vec{\nabla} \times [f\,\vec{A}] = f\,\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} f$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

a) A partir do Teorema de Stokes e considerando $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{c} f(\vec{r})$, onde $\vec{c}$ é um vetor constante, mostre que

$$\int_S \vec{\nabla} f(\vec{r}) \times d\vec{a} = -\oint_P f(\vec{r})\, d\vec{l}.$$

b) Para $f(\vec{r}) = \vec{c} \cdot \vec{r}$, $\vec{c}$ constante, mostre que

$$\oint_P (\vec{c} \cdot \vec{r})\, d\vec{l} = \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \text{onde} \qquad \vec{a} = \int_S d\vec{a}.$$

c) Mostre que

$$\oint_P (\hat{r} \cdot \vec{r}\,')\, d\vec{l} = -\hat{r} \times \int d\vec{a}\,'$$

onde $\vec{r}\,'$ independe de $\hat{r}$.

Questão 34. Mostre que o termo de dipolo, da questão 31, pode ser expresso por

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2},$$

onde

$$\vec{m} = \int I\, d\vec{a}'$$

é o *momento de dipolo magnético da distribuição de corrente*.

Questão 35. Utilizando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{B} + \vec{A}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

e considerando um dipolo puro $\vec{m}$, mostre que o campo magnético associado ao potencial $\vec{A}_{dip}(\vec{r})$, da questão anterior, é dado por

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}[\,3\,(\vec{m}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{m}\,].$$

Questão 33. Considere uma superfície com densidade superficial de corrente $\vec{K}$ e normal $\hat{n}$ "para cima". Sejam $\vec{A}$ e $\vec{B}$ os valores do potencial e campo magnéticos "acima" da superfície e $\vec{A}\,'$ e $\vec{B}\,'$ os valores correspondentes "abaixo" da superfície. Demonstre os resultados a seguir.
a) A descontinuidade do campo magnético na superfície é dada por:

$$\vec{B} - \vec{B}\,' = \mu_0\vec{K}\times\hat{n}.$$

b) O potencial vetorial magnético é contínuo na superfície:

$$\vec{A} = \vec{A}\,'.$$

.....