F602 Eletromagnetismo II

Turma C | 2º Semestre - 2010 | Márcio José Menon

Capítulo VI RADIAÇÃO

• ÍNDICE

1. Conceito e Definição de Radiação
2. Carga Puntual
3. Sistema de Cargas Puntuais - Fontes Localizadas - Antenas

1. Conceito e Definição de Radiação

1.1 Aspectos Qualitativos

1.2 Aspectos Quantitativos

1.2.1 Vetor de Poynting e Potência

1.2.2 Potência Radiada

1.3 Origens Físicas da Radiação no Vácuo

2. Carga Puntual

2.1 Resultados Gerais (Vácuo)

2.1.1 Campos de Liénard-Wiechert

2.1.2 Vetor de Poynting

2.1.3 Potência Radiada

2.2 Casos Particulares no Vácuo e Aplicações

2.2.1 Carga com Baixa Velocidade - Fórmula de Larmor

2.2.2 Movimento Arbitrário - Generalização de Lienard

2.2.3 Carga com Velocidade e Aceleração Colineares: Radiação de Frenamento

2.2.4 Carga em Movimento Circular Uniforme: Radiação Síncrotron

2.3 Meios Dielétricos - Radiação Cerenkov

2.4 Reação de Radiação

2.4.1 Conceito

2.4.2 Fórmula de Abraham-Lorentz

3. Sistemas de Cargas Puntuais - Fontes Localizadas - Antenas

3.1 Conceito Elementar de Antena Emissora

3.2 Radiação Dipolar

3.2.1 Radiação Emitida por um Dipolo Elétrico Oscilante

a) Fonte, Potenciais e Campos

b) Vetor de Poynting e Potência Radiada

c) Aplicações Físicas

3.2.2 Radiação Emitida por um Dipolo Magnético Oscilante

a) Fonte, Potenciais e Campos

b) Vetor de Poynting e Potência Radiada

3.2.3 Radiações de Dipolos Elétrico e Magnético de Dimensões Comparáveis
3.3 Fonte Localizada Arbitrária - Expansão Multipolar
3.3.1 Discussão Geral
3.3.2 Expansão em Primeira Ordem com Radiação

Referências do Capítulo

• David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, *3rd edition* (Person Education, New Jersey, 1999), capítulo 11.

• Kleber D. Machado, *Teoria do Eletromagnetismo*, Volume III (Editora UEPG, Ponta Grossa, 2006), capítulos 24, 25 e 28.

• John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy *Fundamentos da Teoria Eletromagnética* (Campus, Rio de Janeiro, 1982), Sec. 16.6 e capítulos 20 e 21.

• W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, (Addison Wesley, Reading, 1962), capítulo 20.

• QUESTÕES PROPOSTAS

Os exemplos e problemas indicados, referem-se à referência principal (Griffiths, 3a. edição).

1. Conceito e Definição de Radiação

Questão 1. a) O que significa radiação eletromagnética?
b) Qual a definição de potência radiada?

Questão 2. Com base nas equações de Jefimenko (campos retardados) e na definição de potência radiada, explique as origens físicas da radiação eletromagnética no vácuo, isto é, o que dá origem à radiação.

2. Carga Puntual

Questão 3. Considere uma carga puntual q em movimento arbitrário, com velocidade $\vec{v}$, aceleração $\vec{a}$ e os campos de Liénard-Wiechert por ela produzidos. Qual componente do campo elétrico é responsável pela radiação? Justifique a resposta.

Questão 4. Considere uma carga puntual q, com velocidade $\vec{v}$ e o tempo retardado associado,

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}, \qquad \vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}_q}{dt_r}.$$

Mostre que

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial t}{\partial t_r} = 1 - \frac{\hat{\mathscr{r}} \cdot \vec{v}}{c}.$$

Questão 5. Considere a potência emitida por uma carga puntual q com $\vec{v}$ em t_r, $P_{rad}(t_r)$ e a potência observada no instante $t = t_r - \mathscr{r}/c$, $P_{rad}(t)$. Mostre que

$$P_{rad}(t_r) = \left[1 - \frac{\hat{\mathscr{r}} \cdot \vec{v}}{c}\right] P_{rad}(t).$$

Questão 6. Com base nos resultados das 3 questões anteriores, mostre que a expressão geral da potência radiada por uma carga puntual q, em movimento arbitrário (velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ no tempo retardado), pode ser expressa como

$$P = \int \left[1 - \frac{\hat{\mathscr{r}} \cdot \vec{v}}{c}\right] E_{rad}^2 \, \mathscr{r}^2 \, d\Omega,$$

onde o campo de radiação (ou campo de aceleração) é dado por

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathscr{r}\vec{\mathscr{r}} \times (\vec{u} \times \vec{a})}{(\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{u})^3}, \qquad \text{onde} \qquad \vec{u} = c\hat{\mathscr{r}} - \vec{v}.$$

Questão 7. Considere o caso de uma carga puntual q com aceleração $\vec{a}$ e *baixa velocidade*, representando essa condição pelo limite

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \to 0.$$

Com base no resultado geral da questão 6, mostre que neste caso particular tem-se:
a)

$$\vec{E}_{rad} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[(\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \vec{a})\, \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \vec{a}]}{\mathscr{r}};$$

b)

$$\vec{S}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mathscr{r}}\right]^2 \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}},$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$ e $\vec{a}$. Faça um esboço do *perfil de radiação* associado a esse resultado.
c)

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\, a^2 \qquad \text{(fórmula de Larmor)}.$$

Questão 8. No caso de *movimento arbitrário* de uma carga puntual q com $\vec{v}$ e $\vec{a}$ (questão 6), pode-se demonstrar que a potência total radiada é dada pela fórmula denominada *generalização de Lienard*:

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2\, \gamma^6}{6\pi c} \left[a^2 - \frac{(\vec{v} \times \vec{a})^2}{c^2}\right],$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$

a) Quais interpretações físicas podem ser extraídas desse resultado?
b) O que é obtido no limite $\beta \to 0$?

Questão 9. Considere uma carga puntual q com velocidade $\vec{v}$ e aceleracao $\vec{a}$ *colineares* (Griffiths - Exemplo 11.3). Com base nos resultados gerais da questão 6, mostre que:
a)

$$\frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{q^2 c^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{[a^2 - (\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \vec{a})^2]}{(c - \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \cdot \vec{v})^5};$$

b)

$$\frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$ e $\vec{v}$ (ou $\vec{a}$).

Questão 10. Com base nos resultados da questão anterior ($\vec{v}$ e $\vec{a}$ *colineares*):
a) Discuta o perfil de radiação correspondente e faça esboços para diferentes valores de $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ (consulte Griffiths problema 11.15);
b) Mostre que a potência total radiada é dada por

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c};$$

c) Quais interpretações físicas podem ser extraídas dessa fórmula?
d) O que significa *radiação de frenamento* (*bremsstrahlung*)?

Questão 11. Considere uma carga puntual q em *movimento circular uniforme* e um sistema de eixos com origem numa posição instantânea da carga (consulte Griffiths - problema 11.16).
a) Mostre que

$$\frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left\{\frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\theta)^5}\right\}$$

e integrando,

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

b) Discuta o perfil de radiação associado e faça alguns esboços, explicitando a dependência com β (consulte Kleber Machado, Sec. 24.4);
c) O que significa *radiação síncrotron* e qual a importância prática desse tipo de radiação? (consulte Kleber Machado, Sec. 24.4 e/ou Jorge Cisneros Secs. 3.4 e 3.5).

Questão 12. a) O que significa *reação de radiação*?
b) Mostre que a Conservação da Enegia sugere que a força associada à reação de radiação pode ser expressa por

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\frac{d\vec{a}}{dt} \qquad \text{(fórmula de Abraham-Lorentz)}$$

c) Discuta as bases físicas da reação de radiação. Isso pode ser feito considerando-se, por exemplo, um modelo bipolar para uma carga puntual (consute Griffiths Sec. 11.2.3 e/ou Kleber Machado Sec. 28.2).

3. Sistema de Cargas Puntuais - Fontes Localizadas - Antenas

Questão 13. A partir das expressões dos potenciais retardados, discuta as propriedades físicas básicas (essenciais) associadas ao conceito elementar de uma *antena emissora*.

Questão 14. Considere como modelo matemático de um *dipolo elétrico oscilante*, duas cargas puntuais $+q(t_r)$ e $-q(t_r)$, separadas por uma distância l, onde

$$q(t_r) = q_0 \cos\omega t_r, \qquad t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}.$$

Estando o dipolo no eixo z, em torno da origem e sendo θ o ângulo entre o vetor posição do ponto de observação $\vec{r}$ e o eixo do dipolo, responda às questões que seguem.
a) Escreva a expressão geral do potencial escalar $V(\vec{r}, t)$;
b) Mostre que, através das seguintes aproximações sucessivas,

Aprox. 1) $l << r$,

Aprox. 2) $l << c/\omega$,

Aprox. 3) $r >> c/\omega$ (zona de radiação),

o potencial V pode ser expresso por:

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0\,\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\cos\,\theta\frac{\text{sen}\,[\omega(t - r/c)]}{r}, \qquad \text{onde} \quad p_0 = q_0 l.$$

c) Considerando a corrente associada ao dipolo representada por

$$\vec{I}(t_r) = \frac{dq(t_r)}{dt_r}\,\hat{z},$$

e a aproximação $l << r$ no cálculo da integral, mostre que o potencial magnético pode ser expresso por

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi}\frac{\text{sen}\,[\omega(t - r/c)]}{r}\,\hat{z}.$$

Questão 15. Para o sistema da questão anterior demonstre os resultados que seguem.
a)

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r}\,\hat{\theta}, \qquad \vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r}\,\hat{\phi},$$

$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t - r/c)]}{r}\,\hat{\theta}\right]^2\,\hat{r}.$$

b) Valor médio em um ciclo de oscilação:

$$< \vec{S} >= \left[\frac{\mu_0 p_0 \omega^4}{32\pi^2 c}\right]\frac{\text{sen}^2\theta}{r^2}\hat{r}.$$

Discuta o perfil desse padrão de radiação e faça um esboço.
c) Potência total radiada (média num ciclo):

$$< P >= \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c}\,\omega^4.$$

Questão 16. Exemplo 11.1. Por que a cor do céu não é violeta?

Questão 17. Considere como modelo matemático de um *dipolo magnético oscilante* uma espira plana percorrida por uma corrente $I(t_r) = I_0\cos(\omega t_r)$ e momento de dipolo expresso por

$$\vec{m}(t_r) = \pi R^2 I(t_r)\hat{z} = m_0\cos(\omega t_r)\hat{z}, \qquad m_0 = \pi R^2 I_0,$$

onde R é o raio da espira disposta no plano xy, com centro na origem. considere também, o ponto de observação $\vec{r}$ situado no plano xy. Através das aproximações sucessivas,

Aprox. 1) $R << r$,

Aprox. 2) $R << c/\omega$,

Aprox. 3) $r >> c/\omega$ (zona de radiação),

mostre que:
a)

$$\vec{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\mathrm{sen}\,[\omega(t-r/c)]}{r}\,\hat{\phi};$$

b)

$$\vec{E}(r,\theta,t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t-r/c)]}{r}\,\hat{\phi}, \qquad \vec{B}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t-r/c)]}{r}\,\hat{\theta},$$

$$\vec{S}(r,\theta,t) = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{m_0\omega^2}{4\pi c}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\cos[\omega(t-r/c)]}{r}\,\hat{\theta}\right]^2\,\hat{r}.$$

c) Valor médio em um ciclo completo:

$$< \vec{S} >= \left[\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3}\right]\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r^2}\hat{r};$$

d) Potência média total radiada:

$$< P >= \frac{\mu_0 m_0^2}{12\pi c^3}\,\omega^4.$$

Questão 18. a) Compare os resultados das questões 15 e 17 e discuta as similaridades e diferenças envolvidas.
b) Com base nas duas questões referidas, a potência média total radiada por um dipolo elétrico (ele) e um dipolo magnético (mag) oscilantes são dadas por:

$$< P >_{ele}= \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c}\,\omega^4 \qquad \text{e} \qquad < P >_{mag}= \frac{\mu_0 m_0^2}{12\pi c^3}\,\omega^4.$$

No caso de os dipolos elétrico e magnético possuirem dimensões comparáveis, podemos considerar $l \approx \pi R$. Associando $I_0 = q_0\omega$, mostre que nesse caso:

$$< P >_{mag} << < P >_{ele}$$

Questão 19. No caso de fontes localizadas arbitrárias de cargas, discuta a abordagem geral via expansão dos potenciais em multipolos (com ou sem simetria azimutal).

Questão 20. Exemplos e detalhes de cálculo sobre multipolos e antenas são discutidos por Kleber Machado, capítulo 25. Escolha dois exemplos e faça a resolução e discussão em detalhe.

.....

.

.

.

.

.

.....

A todos,

Feliz Natal, boas férias e excelente 2011!

menon/nov/2010

.....