

F046 Tópicos de Física Matemática VI

Introdução ao Cálculo Tensorial, Geometria Diferencial e Aplicações

Márcio José Menon

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia

Horário proposto: terças e quintas das 14:00 às 16:00 hs (ou das 16:00 às 18:00 hs)

Ementa: Definições de vetores, simetrias, sistemas de coordenadas, métrica, elementos de geometria diferencial, definições de vetores e operadores via transformação de coordenadas, componentes contravariantes e covariantes de vetores, conceito e definição de tensores, aplicações em Mecânica Clássica (Tensor de Inércia), Eletromagnetismo (momentos de monopolo, dipolo, quadrupolo e octupolo), Teoria da Relatividade (Espaço de Minkowski, quadrvetores) e Eletrodinâmica (equações de Maxwell na forma tensorial).

Objetivos: O Cálculo Tensorial e a Geometria Diferencial constituem tópicos importantes em Física, tanto teórica como experimental. Nas ementas atuais das disciplinas de Graduação em Física, aspectos dos dois tópicos são referidos em diferentes cursos, porém sem uma abordagem abrangente, formal e unificada. Neste curso, objetiva-se apresentar uma introdução didática aos dois tópicos com foco tanto nos aspectos formais como no de aplicações (voltadas, principalmente, às disciplinas de Física da Graduação e da Pós-Graduação). Partindo-se de um nível correspondente ao de alunos de Ciências Exatas que completaram o curso básico, objetiva-se tratar o assunto passo a passo, revisando material básico e destacando-se os conceitos menos óbvios e que apresentam maiores dificuldades. Com isso, pretende-se que os alunos assimilem os conceitos fundamentais e adquiram prática com técnicas essenciais, permitindo um fácil acesso a cursos e obras mais avançadas (algumas sugeridas na bibliografia).

Pré-Requisito na Graduação: F315 Mecânica Geral I ou autorização pelo docente (AA200).

I. Programa

0. Introdução Geral: Conceitos de Vetores e Objetivos da Álgebra Tensorial

- 0.1 Representação Geométrica Elementar
- 0.2 Álgebras Vetoriais: Gibbs-Heaviside e Quaternions
- 0.3 Álgebra Linear: Espaço Vetorial sobre um Corpo
- 0.4 Transformação de Coordenadas e Álgebra Tensorial

1. Simetrias, Sistemas de Coordenadas e Métrica

- 1.1 Simetrias Retangular, Esférica e Cilíndrica
- 1.2 Sistemas de Coordenadas Curvilíneas
- 1.3 Forma Quadrática Fundamental e Métrica

2. Elementos de Geometria Diferencial

- 2.1 Função Vetorial de Argumento Escalar - Diferenciação e Integração
- 2.2 Curvas no Espaço
- 2.3 Equações Paramétricas de uma Superfície
- 2.4 Superfícies Curvilíneas
- 2.5 Curvatura numa Superfície
- 2.6 Propriedades Intrínsecas de Superfícies

3. Rotação do Sistema de Coordenadas Cartesianas: Definições de Escalares, Vetores e Operadores

- 3.1 Conceitos Básicos
- 3.2 Transformação de Vetores e Escalares
- 3.3 Transformação de Operadores
- 3.4 Definições Via Rotação do Sistema de Coordenadas Cartesianas

4. Componentes Contravariantes e Covariantes de um Vetor

- 4.1 Introdução
- 4.2 Aspectos Geométricos das Componentes de um Vetor: “O Problema”
- 4.3 Bases Recíprocas
- 4.4 Componentes Contravariantes e Covariantes
- 4.5 Origem das Denominações: Transformações Direta e Inversa
- 4.6 Relações entre as Componentes Contravariantes e Covariantes: Métrica
- 4.7 Aplicações: Sistemas de Coordenadas Curvilíneas e Retilíneas
- 4.8 Definição Geral de Vetores Via Transformação de Coordenadas

5. Introdução ao Conceito de Tensores

- 5.1 Definição de Operadores: Transformação de Coordenadas
- 5.2 Tensores do Ordem 0, 1 e 2 em Espaços de Dimensão 3
- 5.3 Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão 3
- 5.4 Tensores de Ordem N em Espaços de Dimensão n
- 5.5 Exemplos e Aplicações
 - 5.5.1 Tensores Métricos e Tensor Delta de Kronecker
 - 5.5.2 Tensor Momento de Inércia
 - 5.5.3 Expansão Tensorial do Potencial Elétrico
- 5.6 Conceitos Básicos de Análise Tensorial

6. Aplicações I: Relatividade

- 6.1 Mecânica Newtoniana e as Transformações de Galileu
- 6.2 Princípios da Relatividade Especial e as Transformações de Lorentz
- 6.3 Intervalo entre Dois Eventos (Tempo, Luz e Espaço)
- 6.4 Contração do Comprimento e Dilatação Temporal
- 6.5 Espaço de Minkowski - Quadrvetores
- 6.6 Componentes Covariantes e Contravariantes
- 6.7 Métrica do Espaço de Minkowski - Tensores
- 6.8 Quadrvelocidade e Quadrimomento
- 6.9 Relatividade Geral e Formulação Covariante

7. Aplicações II: Formulação Covariante da Eletrodinâmica

- 7.1 Equações de Maxwell e os Potenciais Escalar e Vetorial
- 7.2 Invariância de Calibre - Calibres de Lorentz e de Coulomb
- 7.3 Quadrvetor Nabla e D'Alembertiano
- 7.4 Quadrvetores Densidade de Corrente e Potencial
- 7.5 Simetrias Associadas aos Campos Elétrico e Magnético
- 7.6 Tensor Intensidade do Campo Eletromagnético - Tensor Dual
- 7.7 Equações de Maxwell na Forma Tensorial

II. Bibliografia

- Referente ao Programa

- M.J. Menon, Notas de Aula (slides)
<http://sites.ifi.unicamp.br/menon/ensino/Fisica-Matematica-2016>
- M.J. Menon, *Tópicos de Análise Vetorial e Álgebra Linear com Aplicações*, Apostila, 2016.
- A.I. Borisenko, I.E. Tarapov, *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, New York, 1979).
- J. Foster, J.D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity* (Springer, New York, 1994), capítulos 1 e 2.
- E. Kreyszig, *Differential Geometry* (Dover Publications, New York, 1991), capítulos I, II, III.
- B.M. Budak, S.V. Fomin, *Multiple Integrals, Field Theory and Series*, (MIR Publishers, Moscow, 1973), capítulos 3, 6 e 7.

- Complementar (básica e avançada)

- C. Kittel e outros *Mecânica*, Curso de Física de Berkeley Vol. 1 (Edgard Blücher, São Paulo, 1970), Caps. 10 a 14.
- H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, Volume 4 - Óptica, Relatividade, Física Quântica (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1998), capítulo 6.
- F.W. Byron, R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, (Dover, 1992).
- C.C. Silva, “Da força ao tensor: evolução do conceito físico e representação matemática do campo eletromagnético”, Tese de Doutorado, IFGW-UNICAMP, 2002.
(disponível em <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses>)
- J. Vaz Jr. “A Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo e a Teoria da Relatividade”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 22, N. 1 (2000), pp. 5 - 31.
- M.J. Menon, “Sobre as Origens das Definições dos Produtos Escalar e Vetorial”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vo. 31, N. 2 (2009), 2305 (1 a 11).
- M. Cyrillo, M.J. Menon, “Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático e a Definição do Momento de Quadrupolo”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 18, N. 3 (1996), pp. 155 - 164.
- J.L. Synge, A Schild, *Tensor Calculus* (Dover, New York, 1969).
- M.R. Spiegel, *Análise Vetorial* (McGraw-Hill, São Paulo, 1974).
- Antonio S.T. Pires, *Geometria Diferencial para Físicos* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015).
- T. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology - A Basic Introduction* (Oxford University Press, Oxford, 2010).
- H. Eves, *Introdução à História da Matemática* (Editora UNICAMP, 2004).
- C.B. Boyer, *História da Matemática* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2003).

III. Critério de Avaliação

- Avaliações

- Duas provas escritas, em sala de aula, individuais, com consulta livre.
- Um trabalho escrito *opcional*, individual ou em grupo de até 3 alunos (Seção IV).
- Um exame final.

- Aproveitamento

M : média aritmética das notas das provas ou das provas e do trabalho.

E : exame

$$\text{Média final } M_f = \frac{M + E}{2}.$$

Se $M \geq 7,0$: dispensa do exame.

Pós-Graduação: $M_f \Rightarrow [8.5 - 10.0]$: A, $[7.0 - 8.4]$: B, $[5.0 - 6.9]$: C, < 5 : D.

IV. Trabalho Escrito

- Tema: o trabalho deverá ter como tema qualquer assunto ou tópico relacionado e de interesse no curso.
- Nível: adequado a alunos com curso básico completo de Física ou Matemática (2 primeiros anos da graduação) e que permita um aprofundamento e/ou complementação dos conhecimentos adquiridos nesta disciplina.
- Estrutura: o texto poderá ser compuscrto ou manuscrito, devendo constar: título, autores, RA, resumo, introdução (motivação/importância do tema escolhido), desenvolvimento do tema em seções/subseções, conclusões e bibliografia.
- Bibliografia básica: Seção II.
- Apesar de o tema (com base no curso) ser livre, indicam-se a seguir, como exemplos, alguns assuntos de interesse:
 - Origens e Evolução Histórica do Cálculo Tensorial
 - Colisões de Partículas em Altas Energias: Leis de Conservação e Quadrivetores
 - Bases Recíprocas e Cristalografia
 - Tensor de Ordem 2 - Momento de Quadrupolo (Eletromagnetismo, Física Nuclear)
 - Tensor de Ordem 3 - Momento de Octupolo
 - Espaços Métricos (e/ou Geometria Diferencial)
 - Espaço de Riemann
 - Espaço de Minkowski
 - Álgebra de Quaternions
 - Álgebra de Grassmann (e/ou Álgebra de Clifford)
 - Tensor de Maxwell
 - Tópicos de Relatividade Geral (Formulação Tensorial)

V. Organização Geral

- *Aulas.* As aulas serão ministradas através de slides e de discussões com os alunos em sala de aula.
- *Questões Propostas.* Para cada capítulo haverá uma lista de questões propostas (exercícios, problemas, questões conceituais e demonstrações), a ser entregue junto com o índice (detalhado) do capítulo, antes de os assuntos serem discutidos em aula. As provas e exame serão baseadas nas questões propostas.
- *Atendimento Extra Classe.* Em caso de dúvidas sobre a matéria ou sobre as questões propostas, que não foram sanadas em sala de aula, incentiva-se o atendimento presencial (individual ou em grupo), através de agendamento de horário (menon@ifi.unicamp.br).

UNICAMP, 22 de outubro de 2015

Márcio José Menon