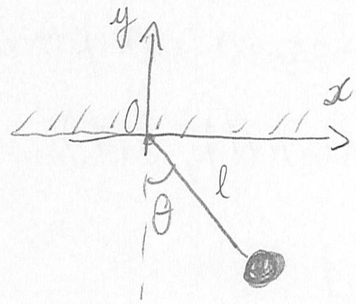
Exemplos de Lagrangiana sem vínculos ou com número reduzido de coordenadas por vínculos holônomos

1– Pêndulo simples



$x = l\sin\theta$ $\qquad \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta$

$y = -l\cos\theta$ $\qquad \dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta$

Energia cinética.

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2$$

Energia potencial: $V = mgy = -mgl\cos\theta$

Lagrangiana: $L = T - V$

$$\boxed{L = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta}$$

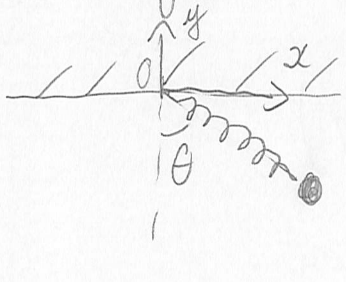
Equação de Euler-Lagrange: apenas uma coordenada (θ)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

2- Pêndulo fixado por mola



Considerações

* Energia potencial é uma soma da gravitacional com a da mola
* Distância da massa em relação a 0 varia com o tempo

$$V = mgy + \frac{k}{2}(r-l)^2$$

l: comprimento natural da mola

r: distância da massa m em relação ao ponto O

Expressões de $x(t)$, $y(t)$ em termos de $r(t)$, $\theta(t)$

$$x = r\sin\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y = -r\cos\theta \qquad \dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$V = -mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r-l)^2$$

A Lagrangiana é então dada por

$$L = T - V$$
$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}(r-l)^2}$$

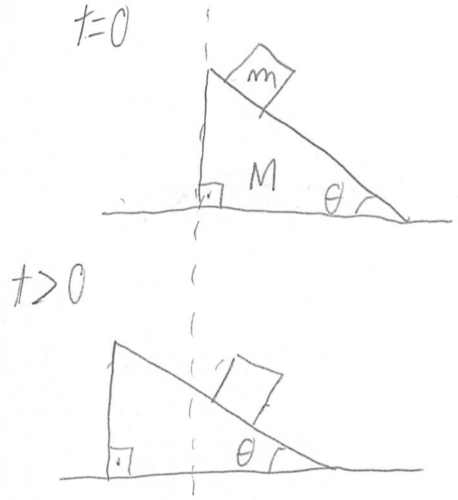
Precisamos de duas equações de Euler-Lagrange

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 = m\ddot{r} - \left[mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l)\right]$$

Equação de movimento 1: $\boxed{\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta - \omega_0^2(r-l)}$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - (-mgr\sin\theta)$$
$$= 2m\cancel{r}\dot{r}\dot{\theta} + m\cancel{r}^2\ddot{\theta} + mg\cancel{r}\sin\theta = 0$$
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

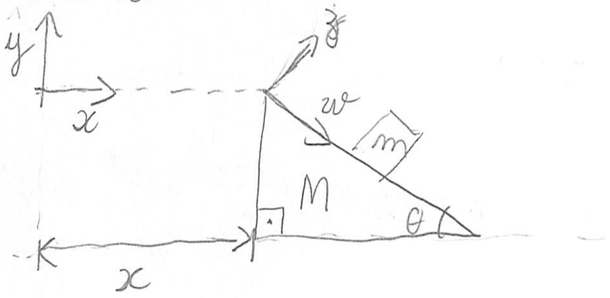
3- Plano inclinado móvel



Como descrever o movimento deste sistema caso a cunha possa se mover?

A figura ao lado ilustra um possível movimento. Note: θ constante

Escolhendo coordenadas



Velocidade da cunha: $\dot{x}$
Centro de massa da cunha não varia na direção $\hat{y}$
$\Rightarrow$ en. potencial gravitacional constante

$$T_{cunha} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad , \quad V_{cunha} = \text{const.}$$ (não considerada no problema)

Coordenadas da massa m:

$$x_m = x + w\cos\theta$$

$$y_m = -w\sin\theta$$

$$\dot{x}_m = \dot{x} + \dot{w}\cos\theta$$

$$\dot{y}_m = -\dot{w}\sin\theta$$

$$T_m = \frac{1}{2} m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{x}\dot{w}\cos\theta)$$

$$V_m = m g y_m = -m g w \sin\theta$$

$$L = T_c + T_m - V_m$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{x}\dot{w}\cos\theta) + m g w \sin\theta}$$

Há duas coordenadas, portanto, duas equações de Euler-Lagrange

x: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{(M+m)\ddot{x} + m\ddot{w}\cos\theta = 0}$$

w: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}}\right) - \frac{\partial L}{\partial w} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{w} + m\dot{x}\cos\theta) - mg\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{w} + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta = 0}$$

Neste caso, é possível encontrar uma expressão explícita para x

$$(M+m)\ddot{x} + m\cos\theta\left[g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta\right] = 0$$

$$(M+m\sin^2\theta)\ddot{x} + \frac{mg}{2}\sin(2\theta) = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{mg\sin(2\theta)}{2(M+m\sin^2\theta)}}$$

$$\ddot{w} = -\frac{M+m}{m\cos\theta}\ddot{x} = \frac{(M+m)g\sin(2\theta)}{2\cos\theta(M+m\sin^2\theta)}$$

$$\ddot{w} = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

Se $M \gg m$: $\ddot{x} \simeq 0$ e $\ddot{w} \approx g\sin\theta$