Seção 10: Momento angular e torque

10.1 Momento angular de uma partícula. Torque

Como descrever corpos rodando um em relação ao outro? Em princípio, posição e velocidade (momento linear) seriam suficientes. Porém, é conveniente introduzir um novo conceito especialmente para o movimento de rotação

Motivação: Leis de Kepler

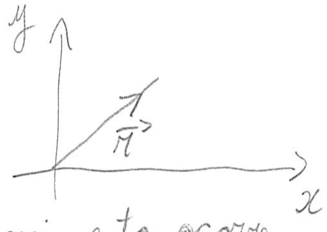
1 – A órbita de um planeta é uma elipse com o Sol em um dos focos.

2 – A área varrida pelo planeta será igual entre dois intervalos de tempos iguais.

3 – A razão entre o cubo do semi-eixo maior da elipse e o quadrado do período da órbita é uma constante para todos os planetas.

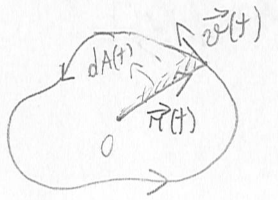
1ª lei: Tanto $\vec{r}(t)$ quanto $\vec{p}(t)$ devem estar em um plano em qualquer tempo. Definimos então um vetor que será sempre perpendicular a $\vec{r}$ e $\vec{p}$ para indicar este plano

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \quad : \text{momento angular}$$



Note: $\vec{L} \cdot \vec{p} = \vec{L} \cdot \vec{r} = 0$. $\vec{L}$ indica o plano em que o movimento ocorre

2ª Lei Como calcular a área de uma curva fechada?



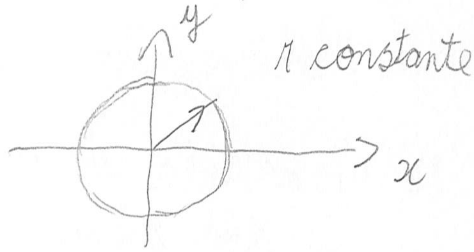
$$dA(t) = \frac{dt}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)| = \frac{dt}{2m} |\vec{L}(t)|$$

$2^{\underline{a}}$ Lei: Se $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{|\vec{L}(t)|}{2m} = \int_{t_3}^{t_4} dt \, \frac{|\vec{L}(t)|}{2m}$$

Como garantir isso para qualquer intervalo: $\vec{L}$ é constante.

Para a $3^{\underline{a}}$ lei, vamos aproximar a elipse por um círculo



$$\vec{r}(t) = r\,(\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y})$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 r\,(\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y})$$

$$= -\omega^2 r\,\hat{r}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2 r\,\hat{r}$$

Exercício: mostre que o momento angular se conserva no movimento circular e uniforme

Suposição: todos os planetas do sistema solar são sujeitos a uma força atrativa em relação ao Sol com forma

$$\vec{F} = -\frac{\alpha m}{r^n}\,\hat{r}$$

m: massa do planeta
α: uma constante

$$-m\omega^2 r\,\hat{r} = -\frac{m\alpha}{r^n}\,\hat{r} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{r^{n+1}}{T^2} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} = \text{constante}:$$

$3^{\underline{a}}$ lei de Kepler sugere $n = 2$, lei de gravitação newtoniana

E se o momento angular não se conservar?

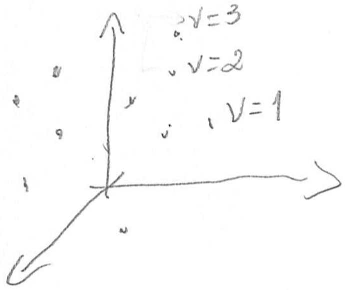
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \left(m \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau} : \text{ torque}$$

Note que, se $\vec{F} \propto \vec{r}$, $\vec{\tau} = 0$. Ou seja, o momento angular é constante para qualquer força central

10.2 Momento angular de muitas partículas



$$\vec{L}_\nu = \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$$

$$\vec{L} = \sum_\nu \vec{L}_\nu \quad : \text{ momento angular total}$$

Para o torque total

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \left(\vec{F}_\nu^{(ext)} + \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda}\right)$$

Considere a soma sobre forças internas que assumimos como centrais ($\vec{F}_{\nu\lambda} \propto \vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda$)

$$\sum_\nu \sum_\lambda \vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} (\vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\lambda} + \vec{r}_\lambda \times \vec{F}_{\lambda\nu})$$

$$\overset{\text{3ª Lei de Newton}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} (\vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\lambda} - \vec{r}_\lambda \times \vec{F}_{\nu\lambda}) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda) \times \vec{F}_{\nu\lambda}}_{=0}$$

Assim,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(ext)} = \vec{\tau}^{(ext)}$$: torque gerado por forças externas

Em muitas situações, será conveniente descrever o sistema em termos das coordenadas do CM.

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu$$: posição do CM

$$\vec{r}_\nu = \vec{R} + \vec{r}_\nu\,'$$ $\vec{r}_\nu\,'$: posição da ν-ésima partícula em relação ao CM.

As posições relativas satisfazem um vínculo

$$M\vec{R} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu = \sum_\nu m_\nu (\vec{R} + \vec{r}_\nu\,')$$

$$= \vec{R}\left(\sum_\nu m_\nu\right) + \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,'$$

$$= M\vec{R} + \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,' \Rightarrow \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,' = 0$$

De modo semelhante

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,'\right) = \sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu\,' = 0$$

Vamos então reescrever $\vec{L}$

$$\vec{L} = \sum_\nu m_\nu (\vec{r}_\nu \times \vec{v}_\nu) = \sum_\nu m_\nu (\vec{R} + \vec{r}_\nu\,') \times (\vec{V} + \vec{v}_\nu\,')$$

$$= \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu\right)}_{=M} \vec{R} \times \vec{V} + \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,'\right)}_{=0} \times \vec{V} + R \times \underbrace{\left(\sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu\,'\right)}_{=0} + \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,' \times \vec{v}_\nu$$

$$\vec{L} = M\,\vec{R}\times\vec{V} + \sum_\nu m_\nu\,\vec{r}_\nu{}'\times\vec{v}_\nu{}'$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R}\times \underbrace{M\frac{d\vec{V}}{dt}}_{=M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{F}^{(ext)}} + \sum_\nu m_\nu\,\vec{r}_\nu{}'\times\frac{d\vec{v}_\nu{}'}{dt}$$

$$= \vec{R}\times\vec{F}^{(ext)} + \sum_\nu \vec{r}_\nu{}'\times\vec{F}_\nu{}' \qquad \vec{F}_\nu{}' = m_\nu\frac{d\vec{v}_\nu{}'}{dt}$$

$$= \vec{\tau}_{CM} + \vec{\tau}_{rel}$$

10.3 Energia cinética em termos do CM e das coordenadas relativas.

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\vec{v}_\nu^{\,2}$$: definição de energia cinética

$$\vec{v}_\nu = \vec{V} + \vec{v}_\nu{}' \Rightarrow \vec{v}_\nu^{\,2} = \vec{V}^2 + 2\vec{v}_\nu{}'\cdot\vec{V} + \vec{v}_\nu{}'^2$$

$$T = \frac{1}{2}\Big(\sum_\nu m_\nu\Big)\vec{V}^2 + \underbrace{\Big(\sum_\nu m_\nu\vec{v}_\nu{}'\Big)}_{=0}\cdot\vec{V} + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\vec{v}_\nu{}'^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\,\vec{v}_\nu{}'^2$$

$$= T_{CM} + T_{rel}$$