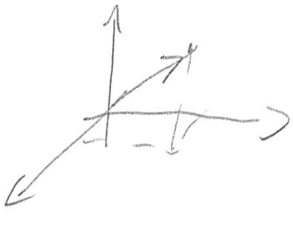
Seção 11: Corpos rígidos

11.1 Teorema de Chasles: Graus de liberdade de um corpo rígido

Graus de liberdade: número de coordenadas necessárias para descrever o movimento de um sistema

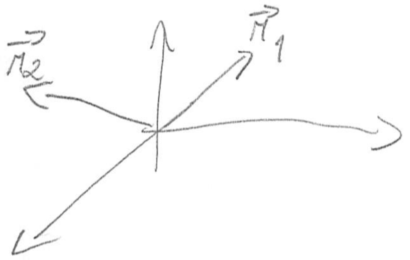
Ex: (1) uma partícula



$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$

Três graus de liberdade

(2) duas partículas



$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$

$\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$

Seis graus de liberdade

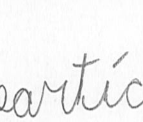
Se a distância $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ for fixa, então podemos eliminar um grau de liberdade

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \text{constante}$$

$$z_2 = z_1 \pm \sqrt{r_{12}^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$$: z_2 se torna função das outras coordenadas

No caso de haver este vínculo, apenas 5 coordenadas são necessárias

(3) três partículas



$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$, $\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$

$\vec{r}_3 = x_3\hat{x} + y_3\hat{y} + z_3\hat{z}$

9 graus de liberdade

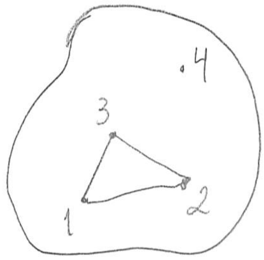
Considere o caso em que r_{12}, r_{13} e r_{23} são fixos. Os três vínculos implicam $9 - 3 = 6$ graus de liberdade

(4) N partículas. Em geral, começamos com $3N$ graus de liberdade. Esses podem ser reduzidos uma vez que introduzimos vínculos.

Lembremos que em um corpo rígido de N partículas

$$r_{\nu\lambda} = |\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda| \text{ é constante para todo } \nu, \lambda$$

Quantas coordenadas generalizadas são necessárias para descrever um corpo rígido?



1, 2, 3: pontos não colineares contidos pelo corpo rígido

O ponto $\nu = 4$ está na intersecção de três esferas

$$S_{14} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_1| = r_{14}\}$$
$$S_{24} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_2| = r_{24}\}$$
$$S_{34} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_3| = r_{34}\}$$

A intersecção destas três esferas é um conjunto de medida nula. A posição de $\nu = 4$ estará determinada uma vez que $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$ estejam. Assim, apenas 6 graus de liberdade são necessários para descrever o movimento de um corpo rígido

Teorema de Chasles: O movimento de um corpo rígido é determinado por 6 graus de liberdade. 3 deles estão relacionados à translação de um ponto e 3 estão relacionados a rotações em torno deste ponto

11.2 Rotação de corpo rígido em torno de eixo fixo

Movimento mais simples de um corpo rígido: rotação em torno de um único eixo (não ponto)

z: eixo de rotação

$\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \dot{\theta} \hat{z}$: vetor determinado pela velocidade angular do corpo rígido

$\vec{\xi}_\nu$: vetor que conecta o ν-ésimo ponto ao eixo de rotação e que pertence ao plano perpendicular a esse eixo

$$\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_\nu$$

Da definição, $\vec{\omega} \perp \vec{\xi}_\nu$. Então, $|\vec{v}_\nu| = |\vec{\omega}||\vec{\xi}_\nu|$

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^{\,2} = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \omega^2 \xi_\nu^2$$

É conveniente definir o momento de inércia em relação ao eixo z (I_z) como

$$I_z = \sum_\nu m_\nu \xi_\nu^2$$

Em alguns casos, será conveniente definir o raio de giração K: $I_z = MK^2$

Em meios contínuos $I_z = \int dm\, \xi^2 = \int d^d r\, \rho(\vec{r})\, \xi_{\vec{r}}^2$

O momento de inércia é útil para outras quantidades

$$\vec{L}_z = \sum_\nu m_\nu (\vec{\xi}_\nu \times \vec{v}_\nu) = \sum_\nu m_\nu \vec{\xi}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{\xi}_\nu) = \sum_\nu m_\nu \xi_\nu^2 \vec{\omega}$$

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Portanto

$$\vec{L}_z = I_z \vec{w} \quad \text{ou} \quad L_z = I_z w = I_z \dot{\theta}$$

I_z é uma constante do corpo rígido. Portanto

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = I_z \ddot{\theta}$$

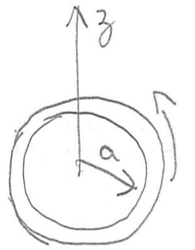
Relações entre movimento do corpo rígido e movimento retilíneo unidimensional

Mov. retilíneo	Rotação em eixo fixo
posição: x	ângulo: θ
velocidade: $v = \dot{x}$	velocidade angular: $w = \dot{\theta}$
aceleração: $a = \ddot{x}$	aceleração angular $\alpha = \ddot{\theta}$
massa: m	momento de inércia: I_z
Força: $F_x = m\ddot{x}$	Torque $\tau_z = I_z \ddot{\theta}$
Energia Potencial $V(x) = -\int_{x_0}^{x} dx' F(x')$ $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$	$V(\theta) = -\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \tau_z(\theta)$ $\tau_z(\theta) = -\frac{dV(\theta)}{d\theta}$
Energia cinética $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$
Momento linear $p = m\dot{x}$	Momento angular $L_z = I_z \dot{\theta}$

11.3 Teorema dos eixos paralelos (ou de Steiner)

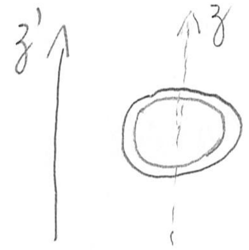
Motivação simples: comece com o problema de momento de inércia mais fácil.

Aro circular, densidade uniforme, eixo de rotação passando no centro



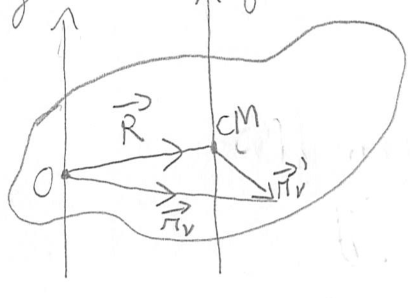
$$I_z = \int dm\, \xi^2 = a^2 \int dm = M a^2$$

Qual o momento de inércia para o caso de o aro girar em torno do eixo z' abaixo?



$$\hat{z} \parallel \hat{z}'$$

Teorema dos eixos paralelos: seja I_{CM} o momento de inércia em torno de um eixo z que passa pelo centro de massa do corpo rígido. Seja z' um eixo paralelo a z no qual colocamos a origem do sistema. Então



$$I_{z'} = I_{CM} + M(\hat{z}\times\vec{R})^2$$

Demonstração: $I_{z'} = \sum_\nu m_\nu \xi_\nu^2$

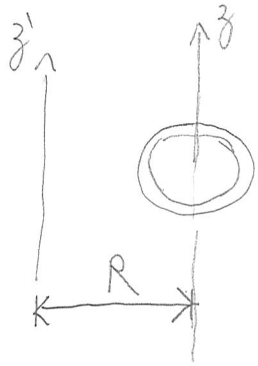
$$= \sum_\nu m_\nu (\hat{z}\times\vec{r}_\nu)^2$$

$$\hat{z}\times\vec{r}_\nu = \hat{z}\times(\vec{R}+\vec{r}_\nu{}')$$

$$(\hat{z}\times\vec{r}_\nu)^2 = (\hat{z}\times\vec{R})^2 + (\hat{z}\times\vec{r}_\nu{}')^2 + 2(\hat{z}\times\vec{R})\cdot(\hat{z}\times\vec{r}_\nu{}')$$

$$I_{z'} = \underbrace{\sum_\nu m_\nu (\hat{z}\times\vec{R})^2}_{= M(\hat{z}\times\vec{R})^2} + \underbrace{\sum_\nu m_\nu (\hat{z}\times\vec{r}_\nu\,')^2}_{I_{CM}} + \underbrace{2\sum_\nu m_\nu (\hat{z}\times\vec{R})\cdot(\hat{z}\times\vec{r}_\nu\,')}_{=2(\hat{z}\times\vec{R})\cdot(\hat{z}\times\underbrace{\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\,'}_{=0}) \;=0}$$

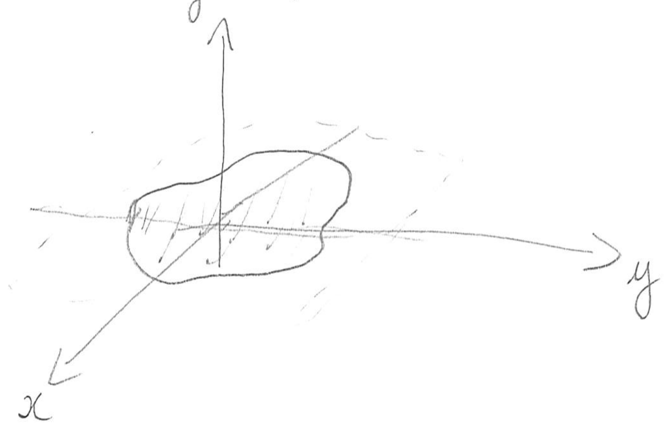
$$I_{z'} = M(\hat{z}\times\vec{R})^2 + I_{CM}$$



$$I_{z'} = Ma^2 + MR^2$$

11.4 Teorema dos eixos perpendiculares

Válido para corpos rígidos planos



$$I_z = \int dm\, \xi_z^2 = \int dm\,(x^2+y^2)$$

$$I_x = \int dm\, \xi_x^2 = \int dm\, y^2$$

$$I_y = \int dm\, \xi_y^2 = \int dm\, x^2$$

$$I_z = I_x + I_y$$

11.5 Translação e rotação em torno de eixo fixo

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \vec{v}_\nu\,'^2 \qquad \vec{v}_\nu\,' = \frac{d\vec{r}_\nu\,'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_\nu - \vec{R})$$ (ver seção 10.3)

Se o eixo de rotação permanece paralelo ao mesmo eixo, $\vec{v}_\nu\,' = \vec{\omega}\times\vec{r}_\nu\,'$

$$T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \xi_\nu^2 \omega^2 = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{I}{2}\omega^2$$