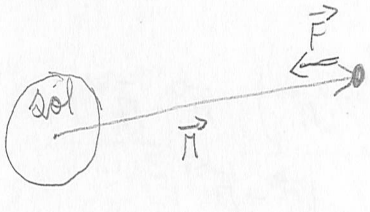
Seção 12 – Gravitação

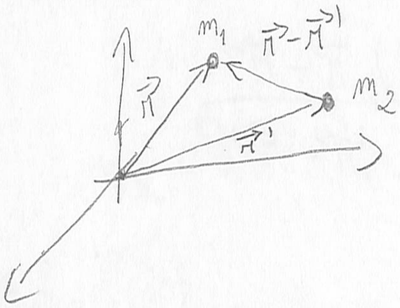
12.1 Força gravitacional e Campo Gravitacional

Conforme visto na discussão da Lei de Kepler, esperamos que a força exercida pelo sol sobre um corpo do sistema solar será



$$\vec{F}_{grav.} \propto -\frac{\hat{r}}{r^2}$$: estimativa da lei de Kepler

Newton enunciou que a força gravitacional entre 2 corpos será dada por



$$\vec{F}_{grav.}(\vec{r}) = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$G \approx 6.674\ N.m^2/kg^2$

m_1, m_2: massas inerciais

Pontos sobre a força gravitacional

1. Ela será sempre atrativa
2. Ela será central
3. Será inversamente proporcional ao quadrado da distân
4. A Eq. acima será válida para partículas pontuais em pares. Para sistemas com muitas partículas, teremos de usar o princípio de superposição.

Massa m fixa em $\vec{r}$, sob influência de N partículas

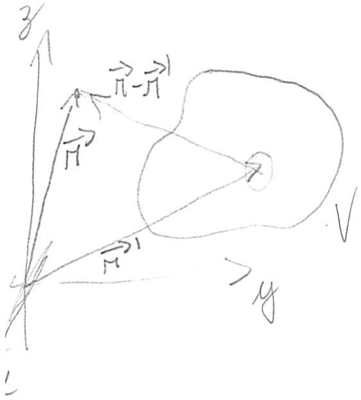
$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i'}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}$$

Caso de uma distribuição contínua

$$\vec{F}_{grav.}(\vec{r}) = -Gm\int dm(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Caso seja um contínuo distribuído em um volume

$$dm(\vec{r}\,') = d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')$$



$$\vec{F}_{grav} = -Gm\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

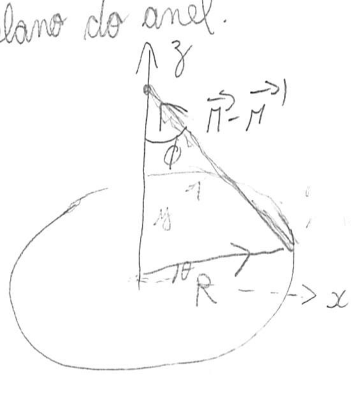
Desta expressão, definimos o campo gravitacional $\vec{g}(\vec{r})$ como

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Desta forma $\vec{F}(\vec{r}) = m\,\vec{g}(\vec{r})$.

Se a distribuiça da massa estiver em superfície, $dm = d^2r'\sigma(\vec{r}\,')$. Se estiver em linha, $dm = dl\,\lambda(\vec{r}\,')$. Daremos alguns exemplos

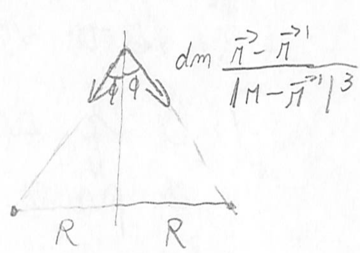
Exemplo 1: Campo gravitacional criado por anel de raio R e densidade linear λ constante ao longo do eixo que passa pelo centro e $\perp$ ao plano do anel.



$$\vec{r}\,' = R(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$dm = \lambda R\,d\theta$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

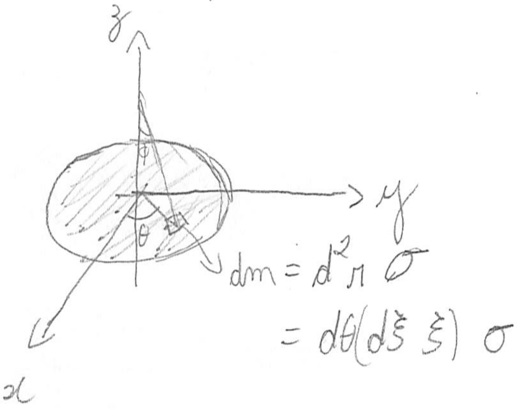


Por simetria, campo gravitacional apontará na direção $(-\hat{z})$

$$g_z(z) = -G\int dm\,\frac{\cos\phi}{z^2+R^2} = -G\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int dm = -\frac{GMz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -\frac{GM\vec{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Exemplo 2: Campo gravitacional no mesmo eixo. Desta vez, a distribuição de massa será superficial



$$\cos\phi(\xi) = \frac{z}{\sqrt{z^2+\xi^2}}$$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -G\hat{z}\int d^2r \, \frac{\sigma\cos\phi}{z^2+\xi^2}$$

$$= -G\hat{z}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\xi \, \frac{\xi\,\sigma\, z}{(z^2+\xi^2)^{3/2}}$$

$$= -G(2\pi\sigma)\vec{z}\int_0^R \frac{d\xi\,\xi}{(z^2+\xi^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^R d\xi \frac{\xi}{(z^2+\xi^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{u^{-1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$u = z^2+\xi^2$

$du = 2\xi\, d\xi$

$$= \frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{z}) = -(2\pi\sigma)G\vec{z}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

É instrutivo considerar o limite $R^2/z^2 \ll 1$

$$\vec{g}(\vec{z}) = -(2\pi\sigma)G\frac{\vec{z}}{z}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)$$

$$= -(2\pi\sigma)G\frac{\vec{z}}{z}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)\right] = -G\pi\sigma R^2\frac{\vec{z}}{z^3}$$

$$= -GM\frac{\hat{z}}{z^2}$$

12.2 Potencial gravitacional

Às vezes é mais fácil encontrar $\vec{g}(\vec{r})$ a partir do "potencial gravitacional" $\phi(\vec{r})$ que satisfaz

$$\vec{g} \equiv -\nabla\phi \qquad \text{(Pode-se provar que } \nabla\times\vec{g}=0\text{)}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\frac{\hat{e}_{\vec{r},\vec{r}\,'}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2} \qquad \hat{e}_{\vec{r},\vec{r}\,'} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

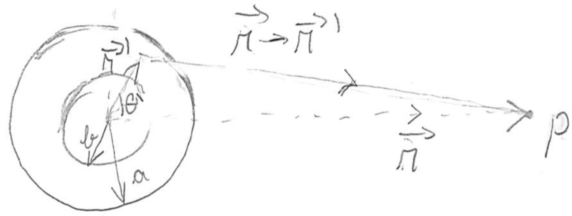
Pode-se mostrar que

$$\phi(\vec{r}) = -G\int d^3r'\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Para isso, note que $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{\hat{e}_{\vec{r},\vec{r}\,'}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}$. Aplicando sobre a equação acima, obtemos $-\nabla\phi(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r})$

<u>Exemplo</u>: potencial gravitacional de casca esférica

$a>b$



$r>a$

$$\phi(\vec{r}) = -G\int d^3r'\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -G\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\int_b^a dr'\,r'^2\frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 = \vec{r}^{\,2}+\vec{r}\,'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'$$
$$= \vec{r}^{\,2}+\vec{r}\,'^2-2rr'\cos\theta'$$

$$\phi(\vec{r}) = -2\pi G\int_0^{\pi}d\theta'\sin\theta'\int_b^a dr'\frac{\rho r'^2}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}$$

$$\phi(\vec{r}) = -2\pi G \int_b^a dr' \frac{\rho r'^2}{\sqrt{r^2+r'^2}} \underbrace{\left[\int_0^\pi d\theta' \frac{\sin\theta'}{\sqrt{1 - \frac{2rr'}{r^2+r'^2}\cos\theta'}} \right]}_{\equiv I(r,r')}$$

Vamos usar $t = \dfrac{2rr'}{r^2+r'^2}$

$$I(r,r') = \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin\theta'}{\sqrt{1-t\cos\theta'}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1+tu}} = \left. \frac{\sqrt{1+tu}}{t/2} \right|_{u=-1}^{u=1}$$

$$= \frac{2(r^2+r'^2)}{2rr'} \left[\sqrt{1 + \frac{2rr'}{r^2+r'^2}} + \sqrt{1 - \frac{2rr'}{r^2+r'^2}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{rr'} \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right]$$

A expressão $\sqrt{(r-r')^2}$ pode ser $r-r'$ ou $r'-r$. Mais esplicitamente

$$I(r,r') = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{r^2+r'^2}}{rr'} \left[r+r' - (r-r') \right] = \dfrac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r}, & r > a \\ \dfrac{\sqrt{r^2+r'^2}}{rr'} \left[r+r' - (r'-r) \right] = \dfrac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r'}, & r < b \\ \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r}, & r' < r \\ \dfrac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r'}, & r' > r \end{cases}, & b < r < a \end{cases}$$

Se $r > a$

$$\phi(\vec{r}) = -2\pi G \int_b^a dr' \frac{\rho r'^2}{\sqrt{r^2+r'^2}} \frac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r} = -\frac{4\pi\rho G}{r} \int_b^a dr' \, r'^2$$

$$= -\frac{4\pi\rho(a^3-b^3)}{3} \frac{G}{r} = -\frac{GM}{r}$$

Utilizando $\vec{g} = -\nabla\phi$

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$: fora da esfera, lei de Newton para massas pontuais é recuperada

Para $r < b$

$$\phi(\vec{r}) = -2\pi G\int_b^a dr'\frac{\rho r'^2}{\sqrt{r^2+r'^2}}\frac{2\sqrt{r^2+r'^2}}{r'}$$

$$= -4\pi G\rho\int_b^a dr'\, r' = -2\pi G\rho(a^2-b^2)$$

Potencial constante. Isso implica que $\vec{g} = -\nabla\phi = 0$ no interior da esfera. Não há campo gravitacional no interior da esfera (em nenhum ponto, não apenas ~~d~~ no centro)

Se $a < r < b$

$$\phi(r) = -4\pi\rho G\left[\int_b^r dr'\frac{r'^2}{r} + \int_r^a dr'\, r'\right]$$

$$= -4\pi\rho G\left[\frac{1}{r}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{b^3}{3r}\right) + \frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]$$

$$= -4\pi\rho G\left[\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3r} - \frac{r^2}{6}\right]$$

$$\nabla\phi = -4\pi\rho G\left(\frac{b^3}{3r^2} - \frac{r}{3}\right)\hat{r} \Rightarrow \vec{g} = -4\pi\rho G\left(\frac{r}{3} - \frac{b^3}{3r^2}\right)\hat{r}$$

Podemos definir continuidade da função potencial

$$\phi(r=b) = -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{6}\right) = -2\pi\rho G(a^2-b^2)$$

$$\phi(r=a) = -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3a} - \frac{a^2}{6}\right) = -4\pi\rho G\left(\frac{a^2}{3} - \frac{b^3}{3a}\right)$$

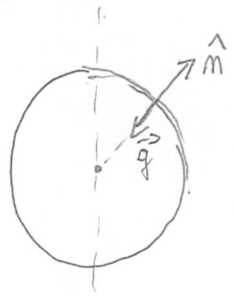
$$= -\frac{MG}{a}$$

12.3 Lei de Gauss para gravitação. Equação de Poisson

Considere o sistema de massas ao centro de uma superfície fechada S. Definimos o fluxo gravitacional Ψ como

$$\Psi = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{g} = \int_S da\, \hat{n} \cdot \vec{g}$$

Considere o caso de uma massa pontual m e que S seja uma esfera



$$\vec{g}(\vec{r}) = -g(r)\,\hat{n} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{n}$$

$$\Psi = \int_S da\, \hat{n} \cdot \vec{g} = -\int_S da \frac{Gm}{r^2} = -(4\pi r^2)\frac{Gm}{r^2}$$

$$\boxed{\Psi = -4\pi G m}$$

Resultado pode ser estendido para qualquer superfície fechada (não demonstro aqui: ângulo sólido total é uma espécie de "invariante topológico")

Caso de N partículas pontuais

$$\Psi = -4\pi G \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Caso de distribuição de massa

$$\Psi = -4\pi G \int d^d r\, \rho(\vec{r})$$

No caso tridimensional

$$\Psi = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{g} = \int_V d^3 r\, \nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \int d^3 r\, \rho(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})} \quad \text{ou} \quad \underset{\text{Eq. de Poisson}}{\boxed{\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})}}$$