6/05 # Seção 13 — Introdução ao Cálculo Variacional

Problema geral: como extremizar um funcional (uma função de uma função)?

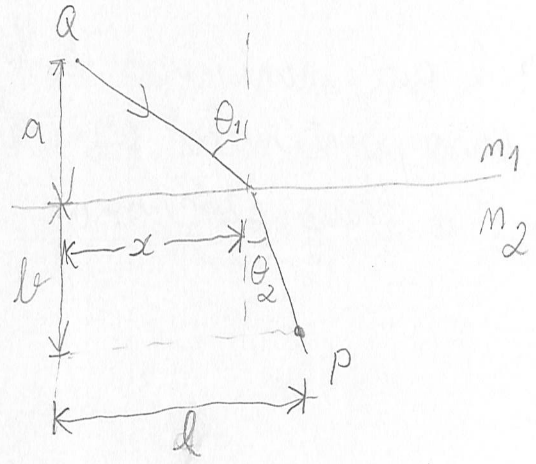
$$F[\gamma(\vec{r})]$$

Mathematics of Classical and Quantum Physics, Byron and Fuller (Cap. 2)

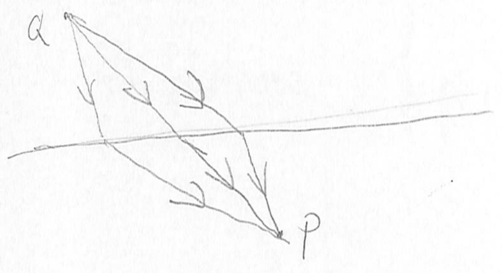
13.1 Alguns problemas famosos

13.1.1 Princípio de Fermat

Este pode ser entendido como problema de uma variável.



Um feixe de luz sai do ponto Q e vai para o ponto P, sendo a distância caracterizada pelos valores (a, b, l) fixos. Em princípio, poderia haver vários valores de x e ângulos θ_1 e θ_2 consistentes com o fato que os feixes de luz se propagam em linha reta. Mas qual valor de x descreve a refração da luz?



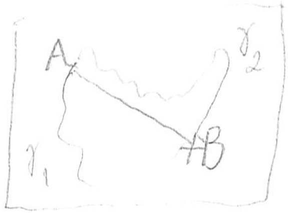
Função tempo

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2} = \frac{n_1\sqrt{x^2+a^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c}$$

Princípio de Fermat: a trajetória minimiza o tempo $\left(\frac{dt}{dx}=0\right)$.
Gera a lei de Snell $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ (Prob. 6.7)

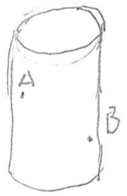
13.1.2 Geodésicas

Qual ~~o~~ caminho que fornece a menor distância entre dois pontos dada uma certa condição de terreno? No plano, esse problema é simples: deve ser uma reta



$$I = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B dx \sqrt{1 + y'^2}$$

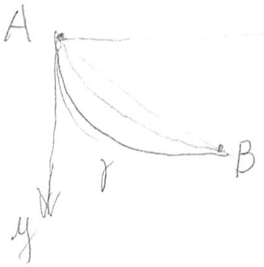
Porém, e em outras condições



Pontos A e B na superfície de um cilindro (Prob. 6.4)

13.1.3 Braquistócrona

1696: Johann Bernoulli.



Encontre a curva γ que minimiza o tempo necessário para uma partícula sair de A e chegar até B. Essa é a braquistócrona

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}$$

Conservação de energia : $\frac{m v^2}{2} - m g y =$ constante

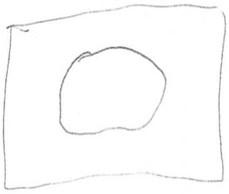
A partícula sai do repouso em A

$$\frac{m v^2}{2} - m g y = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2 g y}$$

$$t = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2 g y}} \quad , \; y = y(x)$$

13.1.4 Problema de Dido

Dido era rainha de Cártago. Diz a lenda que ela perdeu uma guerra e seu território foi reduzido à área no interior de uma corda de comprimento fixo. Qual formato esse território deve ter para maximizar a área?



13.2 Equação de Euler-Lagrange

Extremize uma integral na forma

$$I = \int_{x_A}^{x_B} dx \; f(x, y, y')$$

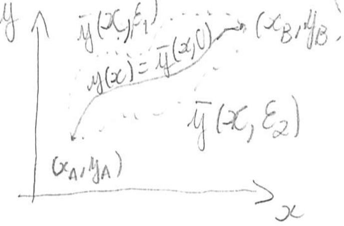
$y = y(x)$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$

x_A, x_B, $y(x_A)$, $y(x_B)$ são dados no começo do problema

Denotamos $y(x)$ a função que minimiza I.

Consideramos uma família de funções $\bar{y}(x, \varepsilon)$ que satisfazem



a) $\bar{y}(x_A, \varepsilon) = y_A$, $\bar{y}(x_B, \varepsilon) = y_B$, $\forall \varepsilon$

b) $\bar{y}(x, 0) = y(x)$

c) $\bar{y}(x, \varepsilon)$, $\dfrac{d\bar{y}}{dx}(x, \varepsilon)$, $\dfrac{d^2\bar{y}}{dx^2}(x, \varepsilon)$, $\dfrac{d\bar{y}}{d\varepsilon}$, $\dfrac{d^2\bar{y}}{d\varepsilon^2}$ são contínuas em x e ε

Neste caso, podemos dizer

$$I(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} dx \; f(x, \bar{y}, \bar{y}')$$

Condição necessária, mas não suficiente para minimização

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0} = 0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon}\right]$$

Condição ⊖ permite aplicar o teorema de Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right)\right]$$

Separa as integrais e integra por partes

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right) \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{x=x_A} = \left.\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{x=x_B} = 0 : \text{ posições fixas por definição}$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right] \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}$$

A minimização em $\varepsilon = 0$ leva a

$$\left[\frac{dI}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\right)\right] \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}}_{\equiv \eta(x)} = 0$$

Só sabemos que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, de forma que essa função é arbitrária. Para garantir a eq. acima

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$ Eq. de Euler-Lagrange (1744 por Euler)

É conveniente derivar uma versão da Eq. de Euler-Lagrange válida para $f = f(y, y')$ (sem dependência explícita de x)

Neste caso, considere

$$C \equiv \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right)$$

$$C = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

$$= y' \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right] - \frac{\partial f}{\partial x}$$

Mas, supomos $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e o termo em colchetes é a Eq. de Euler-Lagrange (vezes -1). Então, $C = 0$ e portanto

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{constante}$$

Generalização para n-funções $y_i(x)$

$$I = \int_{x_A}^{x_B} dx\, f(x, y_1, \ldots, y_n; y_1', \ldots, y_n')$$

$$y_i(x_A) = y_{i,A} \quad , \quad y_i(x_B) = y_{i,B}$$

Repetindo o mesmo procedimento

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Outra fórmula $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i' \frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - f = \text{constante, se } \frac{\partial f}{\partial x} = 0}$

13.3 Soluções famosas

13.3.1 Menor trajeto em um plano

$$l = \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2} \Longrightarrow f = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{constante}$$

$$y' = \alpha \text{ (constante)} \Longrightarrow y(x) = \alpha x + \beta : \text{reta}$$

Alternativa: note que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const}$$

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{constante}$$

$$y' = \alpha \Longrightarrow y(x) = \alpha x + \beta$$

13.3.2 Braquistocrona

Para este problema, devemos considerar

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longrightarrow y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = \text{Constante}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(1+y'^2)} = C$$

É conveniente chamar $\frac{1}{C} = 2a$

$$y(1+y'^2) = 2a \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

$$dy\sqrt{\frac{y}{2a-y}} = dx$$

Integrando ambos os lados

$$x - x_0 = \int dy \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

$$y = a(1-\cos\theta)$$
$$dy = a\sin\theta\, d\theta$$
$$x - x_0 = \int d\theta\, a\sin\theta \sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{a(1+\cos\theta)}} = \int d\theta\, 2a \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$
$$= 2a\int d\theta \sin^2\frac{\theta}{2} = a(\theta - \sin\theta)$$

Assim, a forma paramétrica da braquistócrona é dada por

$$x = a(\theta - \sin\theta) + x_0$$
$$y = a(1-\cos\theta)$$

13.3.3 Superfície mínima (catenária)

Superfície é gerada ao rodar a curva γ em torno do eixo x. Qual curva γ minimiza esta superfície?

$$dA = 2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$$

→ diferencial de área

$$I = 2\pi \int_A^B y\sqrt{(dy)^2+(dx)^2} = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1+y'^2}\; y$$

$$f = y\sqrt{1+y'^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y\, y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = \frac{y\, y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = b \Rightarrow \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1+y'^2 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2-1} = \frac{dy}{dx}$$

$$x - x_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^2-1}} = b\cosh^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) \Rightarrow y = b\cosh\left(\frac{x-x_0}{b}\right)$$

$y = b\cosh u$

$dy = b\sinh u$

b, x_0 são ajustados para que

$y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$