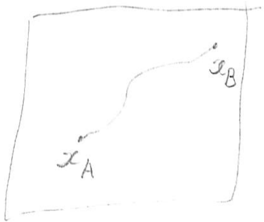
Seção 14. Problemas isoperimétricos - Vínculos 23/05

14.1 Multiplicadores de Lagrange Constantes

Problema: extremizar

$$I = \int_{x_A}^{x_B} dx f(x, y, y')$$



sujeita a uma condição dada por

$$J = \int_{x_A}^{x_B} dx \, g(x, y, y'), \quad J \text{ fixo}$$

Considere uma família de funções de dois parâmetros $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ satisfazendo

(i) $\bar{y}(x_\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y_\alpha$, $\alpha = A, B$ $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2$

(ii) $\bar{y}(x, 0, 0) = y(x)$, função que extremiza I sob condição

(iii) $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tem todas as derivadas contínuas até a segunda ordem

Define-se

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} dx \, f(x, \bar{y}, \bar{y}')$$

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} dx \, g(x, \bar{y}, \bar{y}') = J \text{ (constante)}$$

Definimos a função de dois parâmetros

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

λ: multiplicador de Lagrange constante. Note que, definin-

$$h(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')$$

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_A}^{x_B} dx \, h(x, \bar{y}, \bar{y}')$$

Desejamos fazer

$$\left[\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_1}\right]_{\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0} = \left[\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_2}\right]_{\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0} = 0$$

Repetindo os mesmos procedimentos usados para $I(\varepsilon)$, obteremos

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon_j} = \int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial h}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{y}'}\right)\right]\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_j}$$

Aplicando a equação acima para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ e denotando

$$\eta_j = \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon_j}\right]_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

$$\int_{x_A}^{x_B} dx \left[\frac{\partial h}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{y}'}\right)\right]\eta_j(x) = 0\,, \quad j=1,2$$

Sendo η_j arbitrário,

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = 0\,, \quad h = f + \lambda g}$$

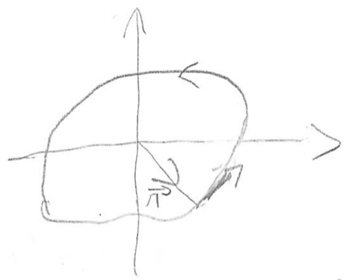
O procedimento acima pode ser generalizado para m vínculos e n funções y_i

$$\boxed{\begin{gathered} h = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i \\ \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y_i'}\right) = 0 \end{gathered}}$$

Derivação necessita de família de funções $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1})$

Um problema útil para ilustrar esta técnica é o problema isoperimétrico: "Encontre a curva de comprimento fixo que maximiza a área em seu interior"

Lembrando da discussão da lei de Kepler



$$A = \int dA = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} dt\, |\vec{r}\times\vec{v}|$$

$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y) \Longrightarrow A = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} dt\,(x\dot{y} - y\dot{x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(t,x,\dot{x},y,\dot{y}) &= \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ g(t,x,\dot{x},y,\dot{y}) &= \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \end{aligned}}$$

O comprimento é fixo

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B dt\,\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$h = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$x: \quad \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\dot{y}}{2} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2} + \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$$

$$= \dot{y} - \lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

$$y: \quad \dot{x} + \lambda\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$$

Integrando as duas equações

$$y - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = y_0, \quad x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = x_0$$

$$y - y_0 = \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \quad x - x_0 = -\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \Longrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 =$$

Equação do círculo

$\lambda = \frac{L}{2\pi}$: valor possível para o raio dado valor fixo do perímetro.

4.2 Princípio de Mínima Ação ou Princípio de Hamilton

Até o momento, estudamos o problema matemático geral de extremizar

$$I = \int_{t_A}^{t_B} dt\, f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right)$$

Em relação às seções anteriores, fizemos $x \to t$, $y \to x$

Para encontrar $x(t)$, devemos resolver a Equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Para o caso particular $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, é muitas vezes conveniente usar a equação

$$\dot{x}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - f = \text{constante.}$$

Pergunta: é possível encontrar uma função, que chamaremos de Lagrangiana, dado por $L = L(t, x, \dot{x})$ tal que possamos recuperar as Leis de Newton via Eq. de Euler-Lagrange?

Considere

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

Uma alternativa: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \implies \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ou $\frac{dp_x}{dt} = F_x$

Outra alternativa: $\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = T + V$
$= E$ (constante)

Ao menos para problemas mecânicos de uma partícula em uma dimensão, mostramos que a solução pode ser obtida se extremizando uma ação S, definida como

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right)$$

A equação de movimento se obtém fazendo

$$\delta S = 0 \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

O cálculo variacional com vínculos será importante para resolver problemas com vínculos cinemáticos.

Na próxima seção, iremos mostrar que o princípio de Hamilton é válido para as chamadas "coordenadas generalizadas.