# Seção 15 _ Dinâmica Lagrangiana

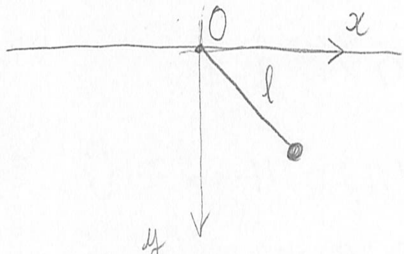
## 15.1 Vínculos

Vínculos são limitações cinemáticas às possíveis posições e velocidades das partículas.

Por exemplo, uma partícula que se move sob ação de uma força central tem seu movimento restrito a um plano. Este <u>não</u> é um vínculo, mas uma restrição de natureza dinâmica.

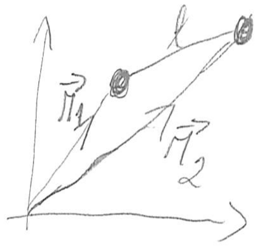
Exemplos de vínculos

1 _ Pêndulo simples, fio inextensível



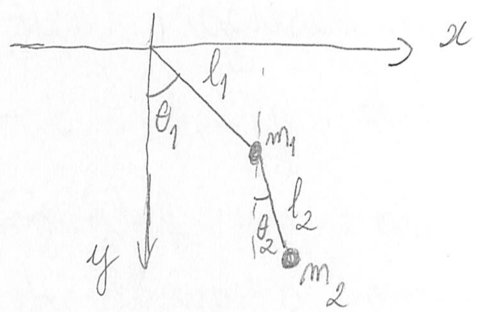

$x(t)^2 + y(t)^2 = l^2$
(constante)

2 _ Massas unidas po
haste rígida




$|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)| =$
(constante

3 _ Pêndulo duplo plano




$|\vec{r}_1(t)| = l_1$

$|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)| = l_2$

Um sistema mecânico será descrito por N coordenadas $q_1, \dots, q_N$ q quantificam a posição das partículas. Vínculos sempre podem ser expressos em termos do tempo, das coordenadas generalizadas e das taxas de variações destas em relação ao tempo (velocidade generalizadas)

Vínculos independentes das velocidades (holônomos)

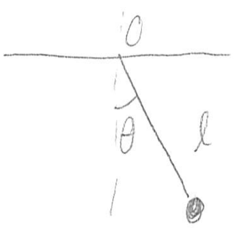
$$f(q_1, \dots, q_M, t) = 0 \qquad M \leq N$$

Vínculos dependentes das velocidades (não-holônomos)

$$g(q_1, \dots, q_M, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M, t) = 0$$

Em geral, podemos usar um vínculo holônomo para reduzir o número de coordenadas generalizadas a serem calculadas. O mesmo não pode ser dito sobre vínculos não-holônomos, para os quais este pode não ser o caso

Exemplo 1: pêndulo simples



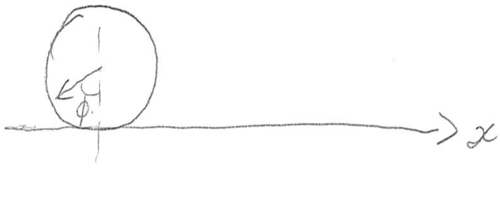

Movimento descrito por duas coordenadas $r$ e $\theta$

$$\vec{r}(t) = r(t)\left[\sin\theta(t)\hat{x} + \cos\theta(t)\hat{y}\right]$$

Mas, há um vínculo $f(r) = r - \ell = 0$

$r(t) = \ell$ é determinado pelo vínculo. Apenas $\theta(t)$ precisa ser determinada

Exemplo 2: Cilindro que rola sem deslizar (raio R)




Vínculo: $g(\dot{x}, \dot{\phi}) = \dot{x} - R\dot{\phi} = 0$

O vínculo é não-holônomo, mas, sob escolha adequada de condições iniciais, ainda podemos eliminar $x$ ou $\phi$ usando $x = R\phi$.

Exemplo 3 _ Disco vertical rola sem deslizar em um plano

$$\dot{x} - R\dot{\phi}\cos\theta = 0$$
$$\dot{y} - R\dot{\phi}\sin\theta = 0$$


Não é possível eliminar $x$, $\phi$ ou $\theta$.

## 15.2 Princípio de D'Alembert

### 15.2.1 Deslocamentos virtuais

**Definição:** Deslocamentos virtuais

Sejo um sistema de N partículas descrito por posições $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Suponhamos que este sistema possua vínculos. Os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_N$ são deslocamentos destas partículas que sejam

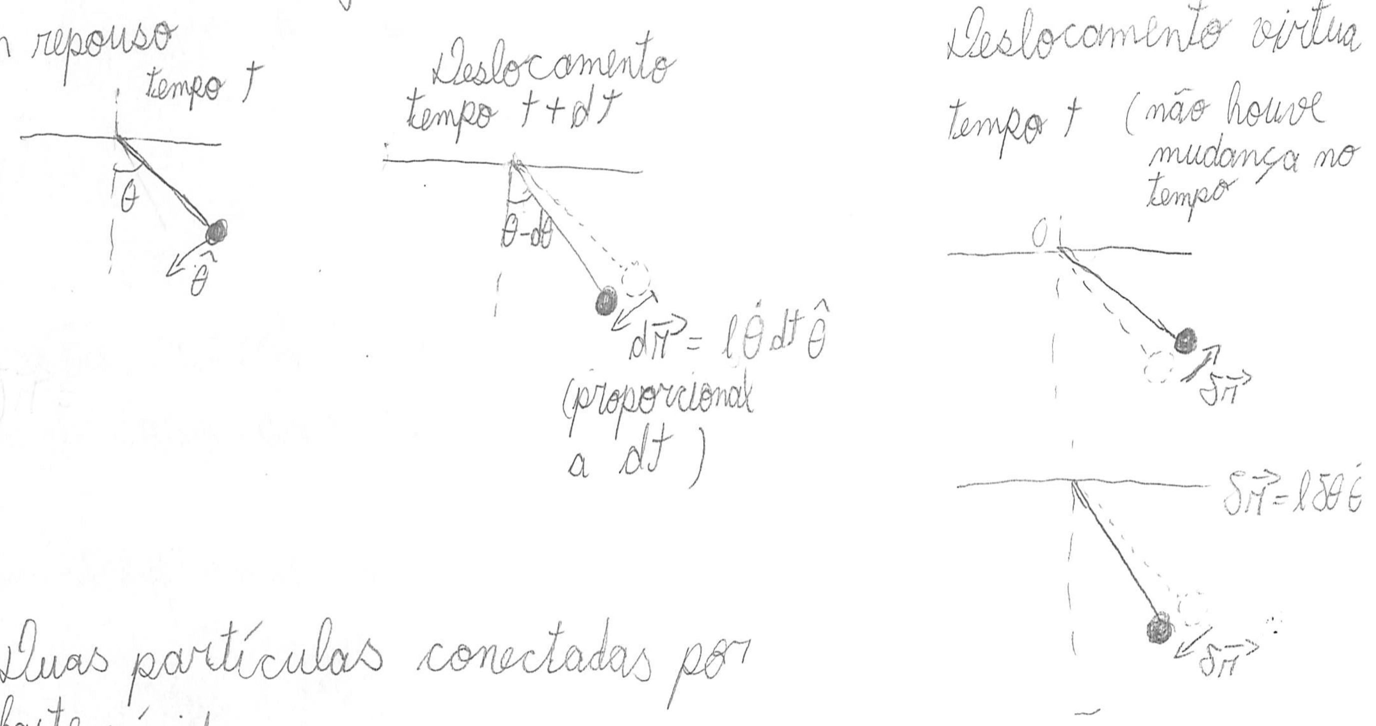
(i) infinitesimais

(ii) ocorrem em $t$ fixo

(iii) Não violam os vínculos.

Exemplos

1- Considere o seguinte pêndulo simples na situação inicial em repouso

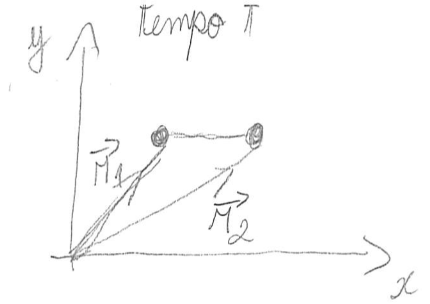



2 - Duas partículas conectadas por haste rígida

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = l^2$$

$$l^2 = |\vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2 - (\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1)|^2 = \underbrace{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}_{l^2} + 2(\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \overbrace{(\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1)^2}^{\approx 0}$$

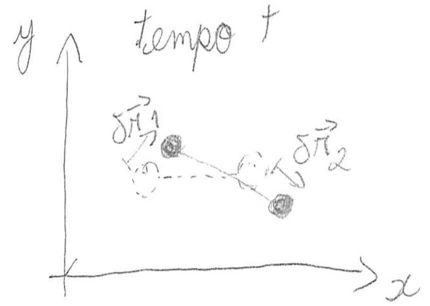
$$\Rightarrow (\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$




$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \parallel \hat{x}$$

$$\delta\vec{r}_1 = \delta x\,\hat{x} + \delta y_1\,\hat{y}$$

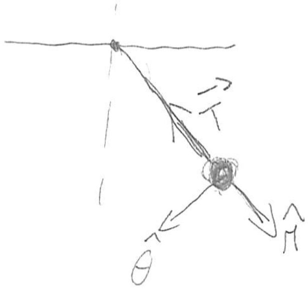
$$\delta\vec{r}_2 = \delta x\,\hat{x} + \delta y_2\,\hat{y}$$




$$\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1 = (\delta y_2 - \delta y_1)\,\hat{y}$$

## 15.2.2 Trabalho virtual e Princípio de D'Alembert

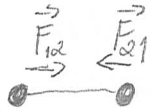
Nos exemplos anteriores, note que a força de vínculo não exerceria trabalho caso os deslocamentos virtuais fossem efetuados



$$\vec{T} = -T\,\hat{r}$$

$$\delta\vec{r} = l\,\delta\theta\,\hat{\theta}$$

$$\delta W = \vec{T}\cdot\delta\vec{r} = 0$$



$$\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} \parallel \hat{x}$$

$$\delta W = \vec{F}_{12}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}\cdot\delta\vec{r}_2$$

$$= \vec{F}_{21}\cdot(\delta\vec{r}_2 - \delta\vec{r}_1)$$

$$= 0$$

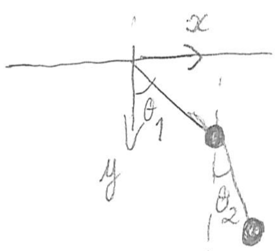
Vínculos para os quais as suas respectivas forças não exercem trabalho sob deslocamentos virtuais são chamados de <u>vínculos ideais</u>.

De forma geral, a força sobre a $\nu$-ésima partícula do sistema se escreve

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(a)} + \vec{f}_\nu$$

$\vec{f}_\nu$: força sobre $\nu$-ésima partícula devido a vínculos

$\vec{F}_\nu^{(a)}$: as outras forças



$$\vec{F}_1^{(a)} = m_1 g\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_2^{(a)} = m_2 g\,\hat{y}$$

$\vec{f}_1, \vec{f}_2$: como saber em função de $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$?

Problema das leis de Newton: forças de vínculo desconhecidas.

Podemos usar o fato de que $\sum_\nu \vec{f}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$;

A segunda lei de Newton demanda

$$\dot{\vec{p}}_\nu - \vec{F}_\nu = 0$$

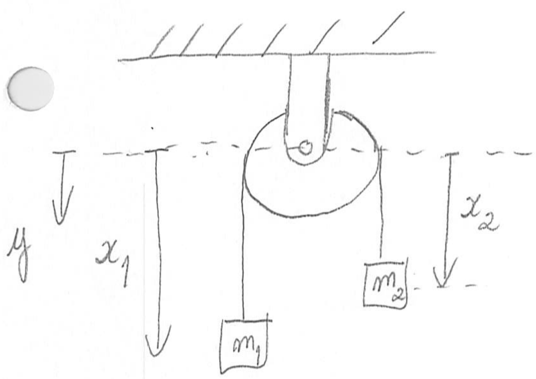
$$\Rightarrow \sum_\nu (\dot{\vec{p}}_\nu - \vec{F}_\nu) \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$$

$$\sum_\nu (\dot{\vec{p}}_\nu - \vec{F}_\nu^{(a)}) \cdot \delta\vec{r}_\nu - \underbrace{\sum_\nu \vec{f}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu}_{=0} = 0$$

Portanto, $\boxed{\sum_\nu (\dot{\vec{p}}_\nu - \vec{F}_\nu^{(a)}) \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0}$ : princípio de D'Alembert

Este princípio permite obter as Eqs. de movimento de um sistema sem se referir às forças de vínculo (que normalmente são desconhecidas.

Exemplo: Máquina de Atwood




$x_1 + x_2 = L$ (constante)

Deslocamentos virtuais:

$\delta x_1 + \delta x_2 = 0$

Princípio de D'Alembert

$$\sum_\nu \dot{\vec{p}}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_\nu \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_\nu$$

$\delta\vec{r}_1 = \delta x_1$ ... 
$\delta\vec{r}_2 = -\delta x_1$ ...

Lado esquerdo: $\sum_\nu \dot{\vec{p}}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \delta\vec{r}_2$

$$= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + (-m_2 \ddot{x}_1)(-\delta x_1)$$

$$= (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 \delta x_1$$

Lado direito: $\sum_\nu \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_\nu = m_1 g \hat{y} \cdot \delta\vec{r}_1 + m_2 g \hat{y} \cdot \delta\vec{r}_2 = (m_1 - m_2) g \delta x_1$

Assim,

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

## 15.3 Coordenadas generalizadas e Equações de Lagrange

N partículas, 3N coordenadas $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$

p vínculos holônomos: $f_1(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$

$$\vdots$$

$$f_p(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$$

Das 3N coordenadas, $n = 3N - p$ são independentes. Diz-se que o sistema tem n graus de liberdade

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k$$ : deslocamentos virtuais

$\delta t = 0$ em um deslocamento virtual

A velocidade é escrita como

$$(*) \quad \vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$$

O trabalho virtual das forças aplicadas é

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k$$

Definindo $Q_k = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k}$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_\nu = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

Outra quantidade envolvida no princípio de D'Alembert

$$\sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{p}}_\nu \cdot \delta \vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k$$

Utilizaremos a seguinte identidade

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} = \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left( m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right) - m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right) \right\}$$

De (*)

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_k} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left( m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt}\left( m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left( \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_\nu \cdot \vec{v}_\nu \right) \right]$$

Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_l}\left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\left( \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\left[ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_k}$$

Assim

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k} = \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left( \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_\nu^{\,2} \right) \right] - m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_k} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left( \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_\nu^{\,2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left( \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_\nu^{\,2} \right) \right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{p}}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_\nu \quad \text{(Princípio de D'Alembert)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q_k \, \delta q_k$$

Encontramos

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} \delta q_k = 0$$

$\delta q_k$ são mutualmente independentes e arbitrários. Portanto, o termo nas chaves se anula, e encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

Agora, considere um caso particular importante

$$\vec{F}_\nu^{(a)} = -\nabla_\nu V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$$

$$= -\left( \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y_\nu}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z_\nu}\hat{z} \right)$$

Assim $$Q_k = -\sum_{\nu=1}^{N} \left( \frac{\partial V}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_k} = 0$$

Como $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}$ encontramos

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V, \quad k = 1, \dots, n = 3N - p}$$

Esta equação tinha sido derivada via cálculo variacional. Mas.

(i) Não havia discussão de vínculos.

(ii) Derivamos apenas para uma coordenada cartesiana. Aqui, vemos que ela vale para coordenadas generalizadas.

É possível demonstrar que, se definirmos um conjunto de $n$ coordenadas generalizadas

$$X_k = G_k(q_1, \dots, q_n, t), \quad k = 1, \dots, n$$

sujeita a uma operação de inversão

$$q_k = g_k(X_1, \dots, X_n, t),$$

então é possível encontrar uma Lagrangiana $\bar{L}$ tal que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Explicitamente

$$\bar{L}(X, \dot{X}, t) = L(q(X,t), \dot{q}(X, \dot{X}, t), t)$$

Ou seja, a forma da Eq. de Euler-Lagrange é invariante sob mudança de coordenadas generalizadas. A questão é: você é capaz de identificar a melhor coordenada para resolver o problema?

## 15.4 Equação de Euler-Lagrange considerando vínculos explicitamente

Consideremos um conjunto de $s$ vínculos holônomos ou não

$$a_l(q, \dot{q}, t) = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, s$$

Vamos considerar o caso particular em que é possível escrever os vínculos acima em forma diferencial como

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, dq_k + a_{lt}\, dt = 0, \quad l = 1, \dots, s$$

Seja $L$ a Lagrangiana sem vínculos. O princípio de Hamilton ainda fornece

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left[ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0$$

Sabemos que os $s$ vínculos faz com que os deslocamentos virtuais deixem de ser independentes. Mais explicitamente, retornamos a (*), fazemos $dt \to \delta t$ e $dq_k \to \delta q_k$. Para deslocamentos virtuais, $\delta t = 0$, de forma que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k = 0 \quad , \quad l = 1, \dots, s$$

As $n$ variações devem satisfazer as $s$ equações acima. Então há $(n-s)$ variações não independentes.

Adicionamos $s$ multiplicadores de Lagrange $\lambda_l = \lambda_l(q, \dot{q}, t)$.

Para qualquer valor de $\lambda_l$, devemos ter

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k \right)}_{=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk} \right) \delta q_k$$

Devemos ter

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk}\right]\delta q_k = 0$$

1 – Consideramos que $\delta q_k$ são independentes para $k=1,\dots,n-s$.

2 – $\delta q_{n-s+1},\dots,\delta q_n$ são deslocamentos virtuais determinados por outros. Para esses, escolhemos $\lambda_l(q,\dot{q},t)$ tais que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk} = 0 \;, \quad k = n-s+1,\dots,n$$

Isso garante que a contribuição será nula para esses deslocamentos virtuais. Para os índices contemplados no caso 1, o termo no colchete na equação acima deve zerar por causa da arbitrariedade de $\delta q_k$. Assim

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l a_{lk} \;, \quad k = 1,\dots,n$$

$n$ equações, $n+s$ incógnitas $(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$.

As outras $s$ equações serão dadas por

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\dot{q}_k + a_{lt} = 0, \quad l = 1,\dots,s$$

Em particular, se o vínculo é holônomo

$$f_l(q,t) = 0, \quad l = 1,\dots,s$$

A derivada total no tempo fornece

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0.$$ Basta identificar $a_{lk} = \dfrac{\partial f_l}{\partial q_k}$

$a_{lt} = \dfrac{\partial f_l}{\partial t}$