Seção 16 Teorema de Noether: simetria e quantidades conservadas

16.1 Ação invariante

Estamos discutindo a dinâmica de um sistema extremizando

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Seja $X(\vec{q}, t)$ uma função escalar e $\vec{\Psi}(\vec{q}, t)$ uma função vetorial de n componentes. Definimos uma transformação infinitesimal como

$$t \to t' = t + \varepsilon X(\vec{q}, t)$$

$$\vec{q}(t) \longrightarrow \vec{q}\,'(t') = \vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\Psi}(\vec{q}(t), t)$$

Dizemos que a integral de ação permanece invariante sob essa transformação se

$$\Delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L\left(\vec{q}\,'(t'), \frac{d\vec{q}\,'(t')}{dt'}, t'\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

$$= 0, \quad \forall t_1, t_2, \varepsilon$$

A seguir, damos os três principais exemplos de transformações infinitesimais deixando o sistema invariante

16.1.1 Invariância por translação temporal

Considere uma Lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu(t))^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

Neste caso, $\vec{q}(t) = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$. Uma translação temporal é definida por $X = 1$ e $\vec{\Psi} = 0$

$t' = t + \varepsilon$

$\vec{q}\,'(t') = (\vec{r}\,'_1(t'), \vec{r}\,'_2(t'), \dots, \vec{r}\,'_N(t')) = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$

Usando a notação previamente estabelecida

$$L\left(\vec{q}\,'(t'), \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}(t'), t'\right) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\vec{r}_\nu\,'(t')}{dt'}\right)^2 - V(\vec{r}_1\,'(t'), \dots, \vec{r}_N\,'(t'))$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\vec{r}_\nu(t)}{dt}\underbrace{\frac{dt}{dt'}}_{=1}\right)^2 - V(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

$$= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

$$\int_{t_A}^{t_B} dt \left[L\left(\vec{q}\,'(t'), \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}(t'), t'\right) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\right] = 0$$

$$= \int_{t_A'}^{t_B'} dt' \, L\left(\vec{q}\,'(t'), \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}(t'), t'\right) - \int_{t_A}^{t_B} dt \, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0 = \Delta S.$$

16.1.2 Invariância por translação rígida

Consideremos uma Lagrangiana da forma

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - \sum_{\nu<\mu} V(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$$

Consideremos $X = 0$ e $\vec{\Psi}(\vec{q}, t) = \underbrace{(\delta\vec{r}, \delta\vec{r}, \dots, \delta\vec{r})}_{N \text{ vezes}}$, $\delta\vec{r}$ constante.

Note que as velocidades não se alteram, nem as distâncias relativas $((\vec{r}_\nu + \varepsilon\delta\vec{r}) - (\vec{r}_\mu + \varepsilon\delta\vec{r}) = \vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu$ para todo $\nu, \mu)$.
Portanto, $L\left(\vec{q}\,'(t'), \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}(t'), t'\right) = L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}, t)$, e a Lagrangiana é invariante.

16.1.3 Invariância por rotação rígida

Consideremos agora uma Lagrangiana da forma

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - \sum_{\nu<\mu} V(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|)$$

Consideremos $X = 0$ (i.e, $t' = t$) e

$$\vec{\Psi}(\vec{q}(t), t) = (\hat{n} \times \vec{r}_1, \hat{n} \times \vec{r}_2, \dots, \hat{n} \times \vec{r}_N).$$

Note que, sob essa transformação

$$(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)^2 \longrightarrow (\vec{r}_\nu{}' - \vec{r}_\mu{}')^2 = \left[\vec{r}_\nu + \varepsilon(\hat{n} \times \vec{r}_\nu) - (\vec{r}_\mu + \varepsilon(\hat{n} \times \vec{r}_\mu))\right]^2$$

$$= (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)^2$$

$$+ 2\varepsilon\, (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \cdot \underbrace{(\hat{n} \times (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu))}_{\text{perpendicular a } \vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu} + O(\varepsilon^2)$$

Portanto, $|\vec{r}_\nu{}' - \vec{r}_\mu{}'| = |\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$

Por outro lado

$$\left(\frac{d\vec{r}_\nu{}'}{dt'}\right)^2 = \left(\dot{r}_\nu + \varepsilon(\hat{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\right)^2 = \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} + 2\varepsilon\, \dot{\vec{r}}_\nu \cdot (\hat{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d\vec{r}_\nu{}'}{dt'}\right)^2 = \dot{r}_\nu^2$$

Assim, a Lagrangiana (e a ação) permanece invariante sob $\vec{\Psi}$.

16.2 Definição de Hamiltoniana. Equações canônicas

Como passo intermediário da demonstração do teorema de Noether, vamos definir a Hamiltoniana. Primeiro, considere o seguinte fato das diferenciais da Lagrangiana

$$L = L(q, \dot{q}, t) \Longrightarrow dL = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

É conveniente definir uma "transformação de Legendre" uma vez que definimos o momento conjugado

Definição: o momento conjugado a q_k será denotado p_k e definido como

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Assim, $dL = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + p_k \, d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

É interessante usar a Eq. de Euler Lagrange para reescrever $\frac{\partial L}{\partial q_k}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k$$

Assim, $dL = \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{p}_k \, dq_k + p_k \, d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Agora, podemos definir a Hamiltoniana como

$$H \equiv \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k p_k - L$$

Assim, podemos demonstrar que

$$dH = \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{q}_k \, dp_k + p_k \, d\dot{q}_k \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{p}_k \, dq_k + d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\boxed{\therefore dH = \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt} \quad H = H(q, p, t)$$

As equações diferenciais acima permitem derivar as Equações canônicas: $\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \; \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$

Estas equações permitem derivar o seguinte lema

Lema: $\dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$

Demonstração:

$$\frac{dH(q,p,t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) + \overbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}^{=-\frac{\partial L}{\partial t}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-\dot{p}_k\dot{q}_k + \dot{q}_k\dot{p}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \blacksquare$$

Posteriormente, vamos retornar a esses resultados.

16.3 O teorema de Noether

Teorema de Noether: Seja $L(\vec{q}, \frac{d\vec{q}}{dt}, t)$ a Lagrangiana de um sistema mecânico com n graus de liberdade. Se a ação permanece invariante sob a transformação infinitesimal definida por $X(\vec{q},t)$ e $\vec{\Psi}(\vec{q},t)$, então

$$C = HX - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Psi_k = HX - \sum_{k=1}^{n} p_k\Psi_k$$

Demonstração: todos os cálculos serão feitos até a ordem ε. Neste caso

$$t' = t + \varepsilon X \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon\dot{X}, \quad \frac{dt}{dt'} = 1 - \varepsilon\dot{X}$$

$$\frac{d\vec{q}'(t')}{dt'} = \frac{d\vec{q}'(t')}{dt}\frac{dt}{dt'} = (\dot{\vec{q}} + \varepsilon\dot{\vec{\Psi}})(1-\varepsilon\dot{X}) = \dot{\vec{q}} + \varepsilon\underbrace{(\dot{\vec{\Psi}} - \dot{\vec{q}}\dot{X})}_{=\vec{\xi}}$$

Desta forma, a variação da ação será dada por

$$\Delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \, L\left(\vec{q}\,', \frac{d\vec{q}\,'}{dt'}, t'\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt \, L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \,(1+\varepsilon \dot{X}) \underbrace{L\left(\vec{q}+\varepsilon \vec{\psi}, \dot{\vec{q}} + \varepsilon \vec{\xi}, t+\varepsilon X\right)}_{\mathcal{L}} - \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

$$\mathcal{L} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=\dot{p}_k} \psi_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{=p_k} \xi_k \right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{-\frac{dH}{dt}} X \right]$$

Assim, em ordem ε,

$$\Delta S = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dot{X} L + \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{p}_k \psi_k + p_k (\dot{\psi}_k - \dot{q}_k \dot{X}) \right) - \frac{dH}{dt} X \right]$$

$$= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\dot{X} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L \right)}_{=H} - \frac{dH}{dt} X + \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \dot{\psi}_k + \dot{p}_k \psi_k \right) \right]$$

$$= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\frac{d}{dt}(XH) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \psi_k \right) \right]$$

Se $\Delta S = 0$, a arbitrariedade de ε, t_1 e t_2 implica que o colchete tem que se anular. Portanto, devemos ter

$$HX - \sum_{k=1}^{n} p_k \psi_k = \text{constante} \quad \blacksquare$$

Vamos então considerar os exemplos anteriormente expostos

1 – $X = 1$, $\vec{\Psi} = 0$: invariância temporal

Neste caso, $H =$ constante. Vimos que a Lagrangiana com essa propriedade tem a forma

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

A definição de Hamiltoniana é dada por

$$H = \sum_{k=1}^{n=3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu)\cdot\dot{\vec{r}}_\nu - L$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}$$

Caso em que Hamiltoniana é energia

2 – $X = 0$, $\vec{\Psi} = \underbrace{(\delta\vec{r}, \delta\vec{r}, \dots, \delta\vec{r})}_{N \text{ vezes}}$

Note que o deslocamento $\delta\vec{r}$ é arbitrário para Lagrangianas da forma

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - \sum_{\nu<\mu} V(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$$

Considere o caso especial $\delta\vec{r} = \hat{x}$. Neste caso

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \Psi_k = \text{constante} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\times 1 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{x}_\nu = P_x$$

: momento linear total na direção $\hat{x}$

Considere os casos $\delta\vec{r} = \hat{y}$ e $\delta\vec{r} = \hat{z}$ também. Segue que $\vec{P} = P_x\hat{x} + P_y\hat{y} + P_z\hat{z}$ é conservado.

3- $X = 0$, $\vec{\Psi} = (\hat{n} \times \vec{r}_1, \dots, \hat{n} \times \vec{r}_N)$ para $L = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \dot{r}_\nu^2 - \sum_{\nu<\mu} V(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|)$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \psi_k = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_\nu) = \hat{n} \cdot \left[\sum_{\nu=1}^{N} (\vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu)\right] = \text{constante}$$

Da arbitrariedade de $\hat{n}$

$$\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu \quad \text{é constante}$$

Exemplo mínimo de problema em que as três quantidades se conservam

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{r}}_p^{\,2} + \frac{1}{2} m_s \dot{\vec{r}}_s^{\,2}$$

$$V = -\frac{G m_p m_s}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} = V(|\vec{r}_p - \vec{r}_s|)$$

Este é o problema de Kepler. Estas quantidades conservadas permitem solucionar o problema de forma exata.