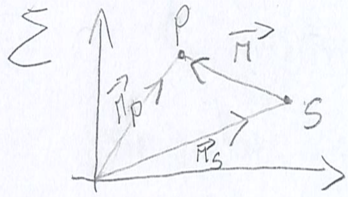
06/06 Seção 17 - Lagrangiana de dois corpos sob forças centrais
Problema de Kepler (Goldstein)

17.1 Redução a problema de um corpo



$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{\vec{r}}_s^{\,2} + \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{r}}_p^{\,2}$$ 6 coordenadas

$$V = V(|\vec{r}_p - \vec{r}_s|) = V(r)$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_s \dot{\vec{r}}_s^{\,2} + \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{r}}_p^{\,2} - V(|\vec{r}_p - \vec{r}_s|)}$$

translação infinitesimal constante
$$\begin{cases} \vec{r}_p \rightarrow \vec{r}_p + \varepsilon \vec{\delta} = \vec{r}_p{}' \\ \vec{r}_s \rightarrow \vec{r}_s + \varepsilon \vec{\delta} = \vec{r}_s{}' \end{cases}$$

$$\dot{\vec{r}}_p{}' = \dot{\vec{r}}_p \qquad \dot{\vec{r}}_s{}' = \dot{\vec{r}}_s$$ $\Rightarrow$ L é invariante por translação

$$\vec{r}_p{}' - \vec{r}_s{}' = \vec{r}_p - \vec{r}_s$$ $\Rightarrow$ momento total é conservado

$$m_p \dot{\vec{r}}_p + m_s \dot{\vec{r}}_s \equiv M \dot{\vec{R}} = \vec{P} = \text{constante}$$

$$M = m_T + m_s$$

$$\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_p \vec{r}_p + m_s \vec{r}_s}{M} \\ \vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{R} + \frac{m_s}{M}\vec{r} = \frac{m_p + m_s}{M} \vec{r}_p$$

$$\boxed{\vec{r}_p = \vec{R} + \frac{m_s}{M}\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{r}_s = \vec{R} - \frac{m_p}{M}\vec{r}}$$

$$T = \frac{1}{2} m_s \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_p}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_p \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_s}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_s + m_p)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_s m_p^2 + m_p m_s^2}{M^2}\right)\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_s m_p}{M}\dot{\vec{r}}^2 = \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2M}}_{\text{constante}} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2, \quad m = \frac{m_s m_p}{m_s + m_p}$$

(massa reduzida)

Constantes não alteram a equação de Euler-Lagrange. Devemos determinar as equações de movimento para as coordenadas relaivas $\vec{r}$.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

$\vec{r}$ tem três coordenadas, mas podemos reduzir a duas.

xy: plano contendo $\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(0)$

$\vec{r}'$: vetor obtido de $\vec{r}$ após rotação por ângulo constante θ

$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}}$, $r' = r \Rightarrow$ Lagrangiana é invariante por rotação em torno do eixo z

Noether garante que a componente l_z do momento angular será conservada. Na verdade, o argumento vale para qualquer rotação em torno de qualquer eixo $\hat{n}$, de forma que $\vec{L}$ é conservado

Conforme discutido isso implica que o movimento irá ocorrer em um plano

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Assim

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = l_z = \text{constante}$$

(conforme discussão acima)

$$r: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{r} - \frac{l_z^2}{m r^3} + \frac{dV}{dr} = 0}$$: devemos descobrir apenas uma coordenada

Podemos achar uma expressão ainda mais simples usando a última constante de movimento: energia. Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a energia se conserva:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \text{constante}$$

$$l_z^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{l_z^2}{2mr^2}$$

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

Obtemos uma expressão fechada

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} \Rightarrow t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

17.2 Expressão geral para equação da órbita.

Em geral, para entender a trajetória, desejamos ter uma expressão $r = r(\theta)$. Voltamos a

$$m\ddot{r} - \frac{l_z^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

$$l_z = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow l_z\, dt = mr^2\, d\theta$$

$$\frac{mr^2}{l_z} d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l_z^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{dr\, l_z}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l_z^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$u = \frac{1}{r} \qquad du = -\frac{dr}{r^2}$$

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du\, l_z}{\sqrt{2mE - 2mV - l_z^2 u^2}}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l_z^2} - \frac{2m}{l_z^2}V - u^2}}}$$

17.3 Problema de Kepler

$$V = -\frac{k}{r} \qquad (k = G\, m_p m_s)$$

$$= -k u$$

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l_z^2} + \frac{2mk}{l_z^2}u - u^2}}$$

$$\alpha + \beta u - u^2 = \alpha - \left(u - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4} = \left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right) - \left(u - \frac{\beta}{2}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{2mE}{l_z^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l_z^2}$$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{\beta^2}{4}\right) - \underbrace{\left(u - \frac{\beta}{2}\right)}_{=v}^2}} = \sqrt{\frac{4}{4\alpha + \beta^2}} \int_{u_0 - \beta/2}^{u - \beta/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{4\alpha + \beta^2}\right) v^2}}$$

$$w = \sqrt{\frac{4}{4\alpha + \beta^2}}\, v$$

$$\overset{\text{escolha } u_0 = \beta/2}{=} \int_0^{\sqrt{\frac{4}{4\alpha+\beta^2}}(u - \beta/2)} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} \qquad w = \cos\mu, \quad dw = -\sin\mu\, d\mu$$

$$= -\cos^{-1}\left(\frac{2u - \beta}{\sqrt{4\alpha + \beta^2}}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{2u - \frac{2mk}{l_z^2}}{\sqrt{4\frac{2mE}{l_z^2} + \frac{4m^2k^2}{l^4}}}\right)$$

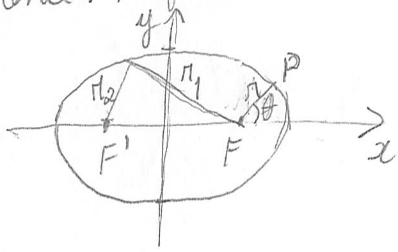
$$= -\cos^{-1}\left(\frac{\frac{l_z^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{mk^2}}}\right)$$

$$\theta = \theta_0 + \cos^{-1}\left(\frac{\frac{l_z^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{mk^2}}} \right)$$

Portanto,

$$\boxed{u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l_z^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{mk^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right)}$$

Vamos considerar um caso específico e deixar indicado a se-ção de outros casos de interesse físico. Considere uma elipse com dois focos F e F' localizados em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, respectivamente. Definimos r e θ conforme a figura abaixo



Por definição, para qualquer ponto da elipse

$$r_1 + r_2 = 2a \quad , \quad a > c$$

Definindo $b^2 = a^2 - c^2$, a equação da elipse em coordenadas cartesianas é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Usaremos esta equação para simplificar as expressões a seguir

$$r^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Simplificando

$$r^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 \Rightarrow \boxed{r = a - \frac{c}{a}x}$$

Sendo $x = c + r\cos\theta$ e definindo a excentricidade como $e = c/a < 1$

$$r = a - e(c + r\cos\theta) \Rightarrow r(1 + e\cos\theta) = a - ec \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{a - ec}(1 + e\cos\theta)}$$

or comparação,

Portanto, $E<0$

$$\frac{c}{a} = e = \sqrt{1+\frac{2El_z^2}{mk^2}} < 1, \quad a - ec = \frac{l_z^2}{mk} = \frac{a^2-c^2}{a}$$

$$\boxed{\frac{c^2}{a^2} = 1+\frac{2El_z^2}{mk^2}} \quad 1-\frac{c^2}{a^2} = 1-e^2 = \frac{l_z^2}{mka} = -\frac{2El_z^2}{mk^2} = \frac{2|E|l_z^2}{mk^2}$$

rbita é determinada las duas quanti- ades conservadas.

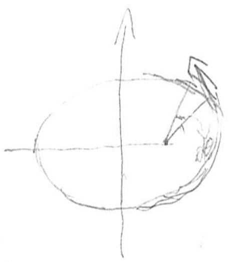
$$\boxed{a = \frac{k}{2|E|}}, \quad c = a\sqrt{1+\frac{2El_z^2}{mk^2}}$$

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 - \frac{l_z^2}{2|E|m}}}$$

Conforme Kepler, vemos que a órbita será uma elipse.

Considere agora o diferencia de área dA

$$dA = \frac{1}{2} r \times r\,d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{l_z}{mr^2}\right) dt$$



$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{l_z}{2m} = \text{constante}$$

Portanto, a área varrida entre dois tempos iguais é igual, conforme observado por Kepler

Como a área de uma elipse é $A = \pi ab$, o período da órbita será

$$\tau = \frac{\pi ab}{l_z/2m} = 2m\frac{\pi ab}{l_z} = 2m\pi\frac{a \times a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{mka(1-e^2)}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k/m}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}}$$

A última aproximação é valida para todos os planetas do sistema solar. Portanto, $\frac{\tau^2}{a^3}$ é constante, conforme Kepler.