Seção 18: Propriedades da Hamiltoniana

Veja a seção 16, sobre o Teorema de Noether

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$: momento conjugado à coordenada q_i

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$: definição da Hamiltoniana H a partir da Lagrangiana L

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$: diferencial direto de $H = H(q,p)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$: diferencial devido a definição de H

Dinâmica pode ser calculada pelas equações canônicas

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

Vamos demonstrar algumas propriedades do Hamiltoniano.

18.1 Relação do Hamiltoniano com energia

Primeiro, lembremos que uma função homogênea de ordem k é qualquer função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaz

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$

Podemos demonstrar que $T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ é uma função homogênea de ordem 2.

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}$$

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i(t)$$: válido se vínculos são holônomos e não dependem explicitamente do tempo

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu} m_\nu \sum_{i,k}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

$$= \sum_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu}\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_k$$

$$\equiv \sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad a_{ik} \text{ independe de } \{\dot{q}_i\}$$

$$\Rightarrow T(\lambda\dot{q}_1,\ldots,\lambda\dot{q}_n) = \lambda^2 T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$$

Uma propriedade importante de funções homogêneas é

$$f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^k f(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = k f \quad \text{(Teorema de Euler)}$$

Para demonstrar o teorema acima, usamos

$$\frac{d}{d\lambda}\left[f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)\right] = \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^k f(x_1,\ldots,x_n)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)}x_1 + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_2)}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_n)}x_n = k\lambda^{k-1} f$$

Para $\lambda = 1$, a igualdade acima se escreve

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = k f \quad \blacksquare$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$

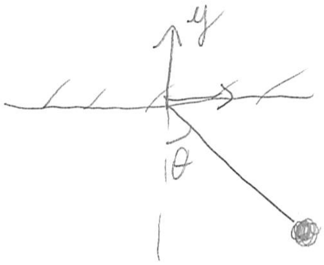
Note que, se o potencial V independe das velocidades generalizadas $\dot{q}_i$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T-V) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Assim: $H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - (T-V) = 2T-(T-V) = T+V$

18.2 Exemplos

* Pêndulo simples



$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - (-mgl\cos\theta)$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Definimos o momento conjugado

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

Reescrevemos a Lagrangiana em termos de p_θ

$$L = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl\cos\theta$$

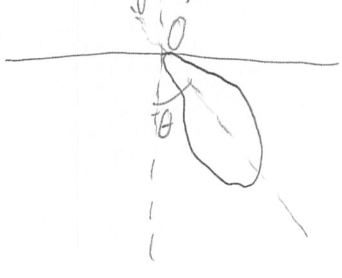
$$H = p_\theta \dot{\theta} - L$$
$$= p_\theta\left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right) - \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta \Rightarrow \boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta}$$

A dinâmica é determinada pelas equações canônicas

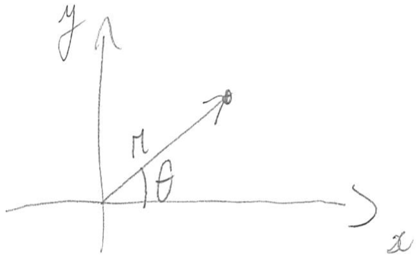
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$

Exercício: faça um pêndulo plano de corpo rígido



* Partícula em potencial central



$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Primeiro, identificamos os momentos conjugados

$$\boxed{p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}} \qquad \boxed{p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}}$$

Em seguida, reescrevemos L em termos de p_r, p_θ

$$L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - V(r)$$

O Hamiltoniano será

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)}$$

Equações canônicas

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta \text{ é constante}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(-\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr}\right)$$

$$\boxed{\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr} = m\ddot{r}}$$

Encontrado na última aula