Seção 2: Forças dependentes da velocidade

2.1 2ª Lei de Newton: problemas em uma dimensão

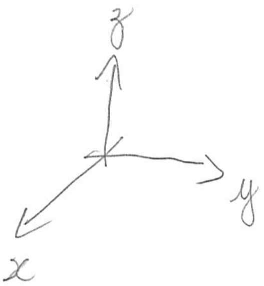
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$: problemas de massa inercial constante

Problemas de interesse

$$\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$: função é truncada até a primeira derivada.

Separação em componentes

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt}\hat{x} = F_x\left(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)\hat{x} \\ m\dfrac{dv_y}{dt}\hat{y} = F_y\left(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)\hat{y} \\ m\dfrac{dv_z}{dt}\hat{z} = F_z\left(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)\hat{z} \end{cases}$$



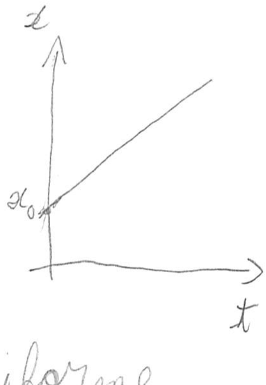
Essa é a forma mais geral da 2ª lei de Newton. Vamos considerar casos mais simples, e depois ir aos mais complicados

2.1.1 $\vec{F} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} = (0,0,0)$

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x(t) = v_{0,x} = \frac{dx}{dt} \text{ (constante)}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0,x}$$

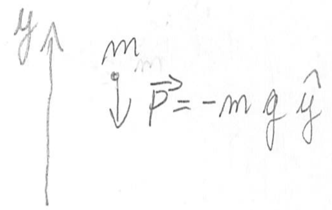
$$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$$



Corpo está em repouso ou movimento retilíneo uniforme.

2.1.2 Queda livre

$$\vec{F} = 0\,\hat{x} - mg\,\hat{y}$$



g constante

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_{0,x} \\ x(t) = x_0 + v_{0,x}\,t \end{cases}$$

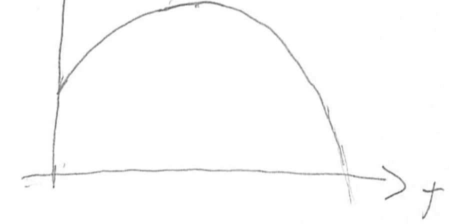
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g$$

$$\int_{v_{0,y}}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt \Rightarrow v_y(t) = v_{0,y} - gt$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0,y} - gt$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t dt'\,(v_{0,y} - gt') = v_{0,y}\,t - \frac{gt^2}{2}$$

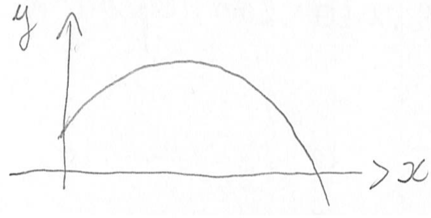
$$y(t) = y_0 + v_{0,y}\,t - \frac{gt^2}{2}$$



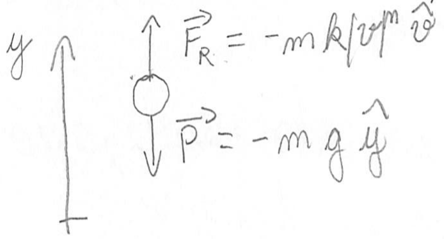
A força gera uma trajetória curva no espaço-tempo.

Por simplicidade, tomemos $x_0 = 0$. $t = \dfrac{x}{v_{0,x}}$ e

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\,x - \frac{g}{2v_{0,x}^2}\,x^2$$



2.1.3 Resistência do ar, projétil na vertical



Consideraremos primeiro o caso de projétil lançado para baixo, sem velocidades iniciais em $\hat{x}$ ou $\hat{z}$.

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg + mk|v_y|^n \qquad (\hat{v} = -\hat{y})$$

Conceito: velocidade terminal. Nesta velocidade limite, a força se anula

$$m(k v_t^n - g) = 0 \Rightarrow \boxed{v_t = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}}$$

Empiricamente, obtemos $n \approx 1$ para velocidades muito menores que o som. Consideremos então $n = 1$ como exemplo. Neste caso, $|v_y| = -v_y$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y = k\left(-\overbrace{\frac{g}{k}}^{=v_t} - v_y\right)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -k(v_y + v_t)$$

$$\int_{v_{y,0}}^{v_y(t)} \frac{dv_y'}{v_y' + v_t} = -k\int_0^t dt' \Rightarrow \ln(v_y + v_t)\Big|_{v_{y,0}}^{v_y(t)} = -kt$$

$$\ln\left(\frac{v_y(t) + v_t}{v_{0,y} + v_t}\right) = -kt \Rightarrow \frac{v_y(t) + v_t}{v_{0,y} + v_t} = e^{-kt}$$

$$v_y(t) = -v_t + (v_{0,y} + v_t)\,e^{-kt}$$

Note que $\lim_{t \to +\infty} v_y(t) = -v_t$

2.2 Algoritmo para problemas com forças dependentes da velocidade em uma dimensão

$$m \frac{dv}{dt} = f(v)$$: depende da velocidade, não da posição ou tempo

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{f(v')} = \int_0^t dt'$$

Se a integral é solúvel analiticamente, então há uma expressão fechada. Caso contrário, a solução será encontrada numericamente

* Exemplo

$$m \frac{dv}{dt} = -m k e^{-\alpha v} \qquad (v > 0)$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{e^{-\alpha v'}} = -k \int_0^t dt' \implies \frac{1}{\alpha} e^{\alpha v'} \Big|_{v_0}^{v(t)} = -kt$$

$$e^{\alpha v(t)} - e^{\alpha v_0} = -\alpha k t$$

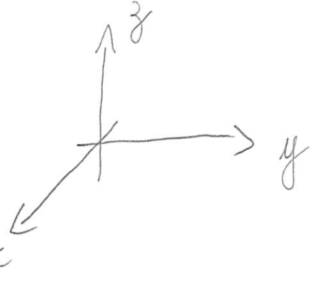
$$v(t) = \frac{1}{\alpha} \ln\left[e^{\alpha v_0} - \alpha k t\right]$$

2.3 Forças Magnéticas

Um exemplo de força em que há acoplamento entre componentes

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$



$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = B_0 \dot{y} \hat{x} - B_0 \dot{x} \hat{y}$$

$$F_z = 0 \Rightarrow z(t) = z_0 + v_{0,z} t$$

$$\begin{cases} m \dfrac{dv_x}{dt} = q B_0 \dot{y} = q B_0 v_y \\ m \dfrac{dv_y}{dt} = -q B_0 \dot{x} = -q B_0 v_x \end{cases}$$

$$m \frac{d^2 v_x}{dt^2} = q B_0 \frac{dv_y}{dt} = q B_0 \left(- \frac{q B_0}{m} v_x \right)$$

$$= - \frac{(q B_0)^2}{m} v_x$$

$$m \frac{d^2 v_y}{dt^2} = - \frac{(q B_0)^2}{m} v_y$$

$\omega_c \equiv \dfrac{q B_0}{m}$: frequência ciclotron

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x \\ \dfrac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v_y \end{cases}$$

Ansatz

$$v_x = A \sin(\omega_c t) + B \cos(\omega_c t)$$

$$\dot{v}_x = A\omega_c \cos(\omega_c t) - B\omega_c \sin(\omega_c t)$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 [A \sin(\omega_c t) + B \cos(\omega_c t)]$$

$$= -\omega_c^2 v_x$$

$$v_x(t) = A \sin(\omega_c t) + B \cos(\omega_c t)$$

$$v_y(t) = C \sin(\omega_c t) + D \cos(\omega_c t)$$

C e D devem depender de A e B

$$\frac{dv_y}{dt} = -w_c v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = w_c C \cos(w_c t) - w_c D \sin(w_c t)$$

$$= -w_c \left[A \sin(w_c t) + B \cos(w_c t)\right]$$

$$\Rightarrow D = A, \quad C = -B$$

$$v_x(t) = A \sin(w_c t) + B \cos(w_c t)$$

$$v_y(t) = -B \sin(w_c t) + A \cos(w_c t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{w_c}\left[-A\cos(w_c t) + B \sin(w_c t)\right] \\ y(t) &= y_0 + \frac{1}{w_c}\left[B\cos(w_c t) + A \sin(w_c t)\right] \\ z(t) &= z_0 + v_{0,z}\, t \end{aligned}}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = q B_0 v_y$$

$$= -q B_0 \left[B \sin(w_c t) - A \cos(w_c t)\right]$$

$$= -q B_0 w_c \left[x(t) - x_0\right]$$

$$= -m w_c^2 \left[x(t) - x_0\right]$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -m w_c^2 \left[y(t) - y_0\right]$$

Notee que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2 + B^2 = v^2$: constante

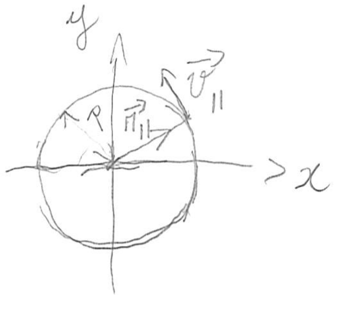
$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = \frac{v^2}{w_c^2} \equiv R^2 \text{ (constante)}$$

Por simplicidade, $x_0 = y_0 = 0$

$$\vec{r}_{\parallel}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

$$\vec{v}_{\parallel}(t) = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{\parallel}(t) \cdot \vec{v}_{\parallel}(t) = 0$$



$$m\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = -m w_c^2 \vec{r}_{\parallel} = -m w_c^2 R\, \hat{r}_{\parallel}$$

$$= -\underbrace{\frac{m v^2}{R}}_{\text{constante}} \underbrace{\hat{r}_{\parallel}}_{\text{varia com tempo}}$$