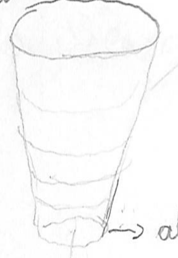
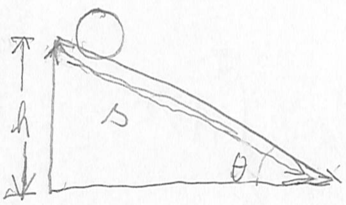
Seção 3 Introdução a leis de conservação. Atrito

3.1 Resultados experimentais

Relógio d'água (capsidra)

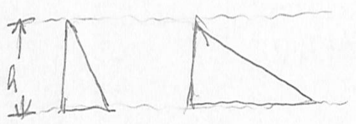




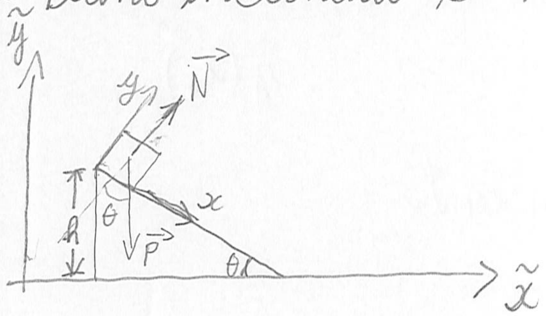
Galileo era capaz de medir o tempo para a esfera rolar no plano inclinado. Ele foi capaz de perceber

$s \propto t^2$ (planos muito lisos)

Aceleração constante (a): $\boxed{\begin{array}{l} s = \frac{a}{2} t^2 \\ v = a t \end{array}}$ (a obtida experimentalmente) → Resultado: v depende apenas de h



3.2 Plano inclinado sem atrito



$\vec{P} = m\vec{g}$

$F_y = N - mg\cos\theta = m\ddot{y} = 0$

$F_x = mg\sin\theta = m\ddot{x}$

$\ddot{x} = g\sin\theta$

$v_x(t) = v_{0,x} + gt\sin\theta$

$x(t) = x_0 + v_{0,x}t + \frac{g\sin\theta}{2}t^2$

$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0,\ v_{0,x} = 0 \\ x(t) = \frac{g\sin\theta}{2} t^2 \end{array}}$

Dado o resultado experimental, é interessante ter uma expressão para a posição do bloco em $\tilde{y}$

$$\tilde{y}(x) = h - x\sin\theta \qquad x(t) = \frac{g\sin\theta}{2}t^2$$

Vamos fazer algumas manipulações algébricas

$$\ddot{x} = g\sin\theta$$

$$2\dot{x}\ddot{x} = 2g\dot{x}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = 2g\dot{x}\sin\theta$$

$$\int_{v_{0,x}^2}^{v_x^2} d(v'^2) = \int_{t_0}^{t} dt\,(2g\sin\theta)\frac{dx'}{dt} = 2g\sin\theta\int_{x_0}^{x} dx'$$

$$v_x^2 - v_{0,x}^2 = 2g\sin\theta\,(x - x_0)$$

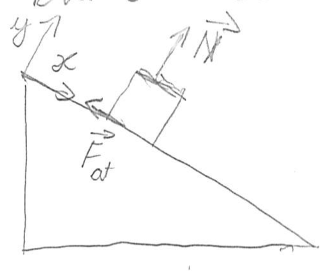
$$\frac{v_x^2}{2} - gx\sin\theta = \frac{v_{0,x}^2}{2} - gx_0\sin\theta$$

$$\frac{mv_x^2}{2} - mgx\sin\theta = \frac{mv_{0,x}^2}{2} - mgx_0\sin\theta$$

$$\frac{mv_x^2}{2} + mg\underbrace{(h - x\sin\theta)}_{\tilde{y}(x)} = \frac{mv_{0,x}^2}{2} + mg\underbrace{(h - x_0\sin\theta)}_{\tilde{y}(x_0)}$$

$$\boxed{\frac{mv_x^2(t)}{2} + mg\,\tilde{y}(x(t)) = \text{constante}}$$

3.3 Plano inclinado com atrito



$$\vec{F}_{at} = -F_{at}\,\hat{x}$$

$$0 \leq F_{at} \leq \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta$$

$$F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

$$F_x = mg\sin\theta - F_{at}$$

Não há movimento até que $F_x \geq 0$

$$mg\sin\theta - \mu_e mg\cos\theta \geq 0$$

$$mg\sin\theta_c - \mu_e mg\cos\theta_c = 0$$

$$\boxed{\tan\theta_c = \mu_e \quad \text{ou} \quad \theta_c = \tan^{-1}(\mu_e)}$$

Movimento ocorre se $\theta \geq \theta_c$

Suponhamos que $\theta > \theta_c$. Consideramos um coeficiente de atrito cinético $\mu_c < \mu_e$ sempre que o corpo começa a se mover

$$F_x = mg\sin\theta - \mu_c N$$
$$= mg(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$$
$$= m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}(t) = g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta) \Rightarrow \dot{x}(t) = g(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)t + v_{0,x}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)t^2 + v_{0,x}t + x_0$$

Consideramos as condições iniciais $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$

$$\tilde{y}(t) = h - x(t)\sin\theta$$
$$= h - \frac{g}{2}\sin\theta(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)t^2$$

A lei de conservação é perdida para $\mu_c \neq 0$

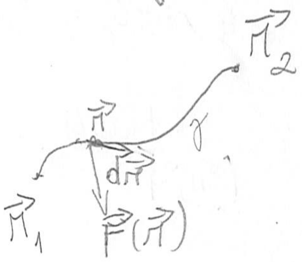
$$\frac{m\dot{x}^2}{2}(t) + mg\tilde{y}(t) = \frac{m}{2}g^2(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)^2t^2 + mgh - \frac{mg^2t^2}{2}\sin\theta(\sin\theta - \mu_c\cos\theta)$$
$$= mgh + \frac{mg^2t^2}{2}(-\mu_c\sin\theta\cos\theta + \mu_c^2\cos^2\theta)$$
$$= mgh + \frac{mg^2t^2}{2}\mu_c\cos^2\theta(\mu_c - \tan\theta)$$

$\tan\theta - \mu_c > \tan\theta - \mu_e > 0 \Rightarrow \mu_c - \tan\theta < 0$

3.4 Trabalho e energia cinéticas

Trabalho W sobre uma partícula ao longo de uma trajetória γ conectando $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$

$$W(\gamma) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\gamma))$$



Vamos transformar a integral do espaço para o tempo

$$W(\gamma) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\gamma)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\gamma))$$

Podemos escrever os resultados acima a partir de uma diferencial total

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v}^{\,2})$$

$$W(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}\right] = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t_2) - \frac{m\vec{v}^{\,2}(t_1)}{2}$$

Definiremos a energia cinética T como $T \equiv \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2}(t) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

A integral acima mostra que

$$W(\gamma) = T_{final} - T_{inicial} = \Delta T$$

: trabalho é igual à variação da energia cinética

Problema exemplo: um barco de massa m está a uma velocidade $v_0 \hat{x}$ em $t = 0$. A partir daí, o motor para e o barco sofre a influência de uma força de arraste $\vec{F}_{ar} = -mk\,e^{-\alpha v}\hat{x}$ até ele parar. Qual o trabalho da força de arraste?

$$W = 0 - \frac{m v_0^2}{2} = -\frac{m v_0^2}{2}$$