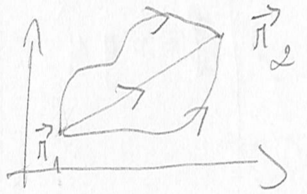
Seção 4: Energia potencial, energia mecânica, pontos de equilíbrio

4.1 Energia potencial.

Suponhamos que temos um campo de forças dependente apenas de $\vec{r}$ tal que $W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2)$ seja idêntico em qualquer trajetória γ



Definimos a energia potencial da seguinte forma. Em primeiro lugar, escolhemos um ponto de referência $\vec{r}_0$ tal que $V(\vec{r}_0) = 0$. Então, definimos

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})$$

Como consideramos $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$

$$dV = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dW = -dT$$

$$d(T+V) = 0 \Rightarrow T+V = E \text{ é constante}$$

$E = T+V$ é a chamada <u>energia mecânica</u> do sistema.

Caso seja possível definir uma energia potencial $V(\vec{r})$ que não dependa explicitamente do tempo, então a energia mecânica será conservada.

A partir do potencial, é fácil recuperar a força

$$dV = \nabla_{\vec{r}} V\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla V}$$

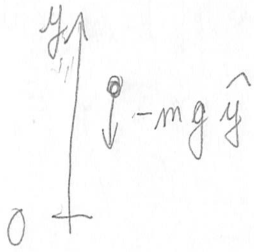
Uma propriedade do gradiente é que $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$, qualquer que seja ϕ. Portanto, se há V tal que $\vec{F} = -\nabla V$, $\nabla\times(-\nabla V) = 0 = \nabla\times\vec{F}$.

Condição suficiente para a existência da energia potencial

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \implies \exists\, V(\vec{r}) \text{ tal que } \vec{F} = -\nabla V$$

4.2 Exemplos de energia potencial

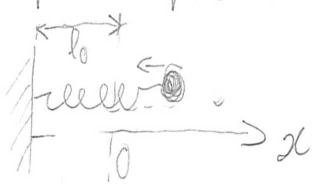
(a) $\vec{F} = -mg\,\hat{y}$



$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \exists\, V$$

$$V(y) = -\int_0^y dy\,(-mg) = mgy$$: encontrado no problema do plano inclinado.

(b) $\vec{F} = -kx\,\hat{x}$



$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -kx & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$V(x) = -\int_0^x dx'\,(-kx') = \frac{k}{2}x^2$$

(c) $\vec{F} = axy\,\hat{x} - az^2\,\hat{y} - ax^2\,\hat{z}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ axy & -az^2 & -ax^2 \end{vmatrix} = 2az\,\hat{x} + 2ax\,\hat{y} - ax\,\hat{z}$$

$\neq 0 \implies \vec{F}$ não gera potencial conservativo.

(d) $\vec{F} = ay(y^2 - 3z^2)\,\hat{x} + 3ax(y^2 - z^2)\,\hat{y} - 6axyz\,\hat{z}$

Mostre que $\nabla \times \vec{F} = 0$. Em seguida, observe que

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -F_x = ay(3z^2 - y^2) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -F_y = 3ax(z^2 - y^2) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -F_z = 6axyz \end{cases} \implies \begin{aligned} V(\vec{r}) &= axy(3z^2 - y^2) + f_1(y,z) \\ V(\vec{r}) &= ax(3yz^2 - y^3) + f_2(x,z) \\ &= axy(3z^2 - y^2) + f_2(x,z) \\ V(\vec{r}) &= 3axyz^2 + f_3(x,y) \end{aligned}$$

$$\implies V(\vec{r}) = axy(3z^2 - y^2)$$

4.3 Potencial explicitamente dependente do tempo

Suponhamos que $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ tal que

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}, t) = 0 \ , \ \forall \vec{r}, t$$

Neste caso, ainda podemos definir

$$V(\vec{r}, t) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}', t)$$

Porém,

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \vec{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$= -\vec{F}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Por outro lado,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2\right] = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Portanto,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{dT}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$$

A energia não é conservada se a força depende explicitamente do tempo. Esse é um caso particular do Teorema de Noether, que veremos na última parte do curso.

Exemplo

$$\vec{F} = -mke^{-\alpha t}\hat{x} \Rightarrow V(x, t) = mkx\,e^{-\alpha t} \quad (\text{Note: } \vec{F} = -\nabla V)$$

$(\alpha > 0)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\,e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -ke^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{ke^{-\alpha t}}{\alpha}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{k\,e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$$

$$E(t) = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x,t)$$

Escolha: $x_0 = 0, v_0 = 0$ $\quad x(t) = -\frac{k}{\alpha^2} e^{-\alpha t}$

$$V(x,t) = mkx\, e^{-\alpha t}$$
$$= -m\frac{k^2}{\alpha^2} e^{-2\alpha t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{\alpha} e^{-\alpha t}$$

$$E(0) = \frac{m}{2}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 - m\frac{k^2}{\alpha^2} = -\frac{m}{2}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2$$

$$E(t) = \frac{m}{2}\left[\frac{k}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]^2 + mk e^{-\alpha t}\left[-\frac{k}{\alpha^2} e^{-\alpha t}\right]$$
$$= -\frac{m}{2}\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2 e^{-2\alpha t}$$

$$\frac{dE}{dt} = m\frac{k^2}{\alpha} e^{-2\alpha t} > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[mkx\, e^{-\alpha t}\right] = -\alpha mkx\, e^{-\alpha t} = m\frac{k^2}{\alpha} e^{-2\alpha t} = \frac{dE}{dt}$$

Note que $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dE}{dt}$