Seção 5 – Solução de problemas pelo método de energia. Ponto de equilíbrio

5.1 Discussão qualitativa do movimento em função da energia

Supomos que estamos em um campo de força tal que $\vec{F} = -\nabla V$ e $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Neste caso, a energia é uma quantidade conservada dada por

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(x)$$

Vamos estudar um caso particular

$$V(x) = \frac{r}{2} x^2 + u x^4$$

$u > 0$ sempre
r pode ser maior ou menor que zero

O primeiro passo para resolver um problema como esse via método de energia é fazer um gráfico de $V(x)$

* Passo zero: ver se $V(x)$ é par ou ímpar em relação a x (ou nenhum dos dois casos. Ver limites para $x \to \pm\infty$

No caso $V(-x) = V(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty$

* Passo um: encontrar potenciais máximos e mínimos locais

$$\frac{dV}{dx}(x_0) = r x_0 + 4u x_0^3 = x_0 (r + 4u x_0^2) = 0$$

Se $r > 0$, $\frac{dV}{dx} = 0$ apenas em $x_0 = 0$. Se $r < 0$, $\frac{dV}{dx} = 0$ em $x_0 = 0$, $x_0 = \pm\sqrt{-\frac{r}{4u}}$

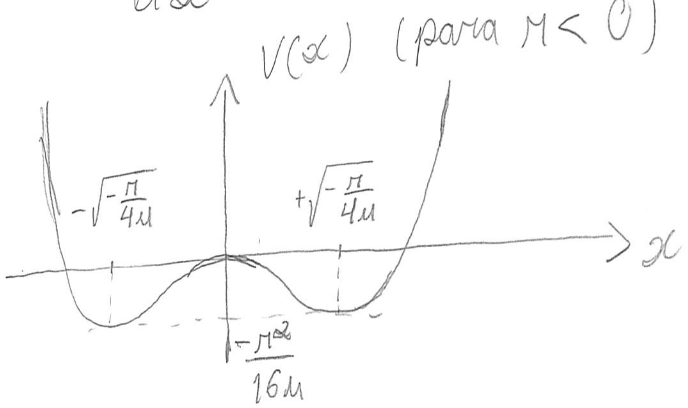
*Passo 2: Identificar se os pontos são máximos ou mínimos

$$\frac{d^2V}{dx^2} = r + 12u\,x^2$$

Se $r > 0$, $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0 = 0) > 0$

Se $r < 0$ $\quad \frac{d^2V}{dx^2}(0) = r < 0$: ponto de máximo local

$$\frac{d^2V}{dx^2}\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{4u}}\right) = r + 12u\left(-\frac{r}{4u}\right) = -2r > 0 : \text{mínimo local}$$



$$V\left(\pm\sqrt{-\frac{r}{4u}}\right) = -\frac{r^2}{8u} + u\,\frac{r^2}{16u^2}$$
$$= -\frac{r^2}{16u}$$

*Passo 3: Classificar os pontos de equilíbrio como estáveis ou instáveis

$\vec{F} = -\nabla V$ que no caso significa $\vec{F} = -\frac{dV}{dx}\hat{x}$

Equilíbrio: $\vec{F} = 0$

Considere o caso $r > 0$ em torno do ponto $x = 0$.

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = -(rx + 4ux^3)\,\hat{x} = F_x\,\hat{x}$$

Se movemos a partícula um pouco para a direita $(x>0)$, $F_x < 0$ fará a partícula tender a mover à esquerda (e vice-versa). Este é um ponto de equilíbrio estável

Agora considere o que ocorre em torno de $x=0$ para $r<0$

$$\vec{F} = \left(|r|x - 4u x^3\right)\hat{x} = x\left(|r| - 4u x^2\right)\hat{x}$$

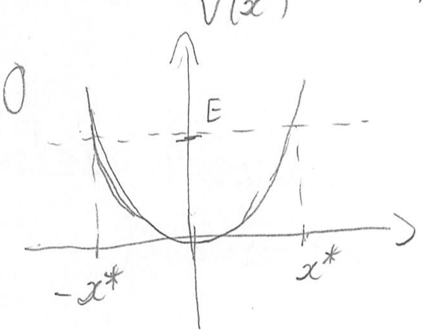
Para x pequeno $\left(|x| \ll \sqrt{\frac{|r|}{4u}}\right)$, se a partícula for um pouco à direita $(x>0)$, $F_x > 0$ também, e a velocidade aumentará.

Este é um ponto de equilíbrio instável

Para $r<0$, é fácil ver que $x_0 = \pm\sqrt{-\frac{r}{4u}}$ é ponto de equilíbrio estável.

*Passo 4: Estabelecer limites do movimento para a energia inicial dada no problema

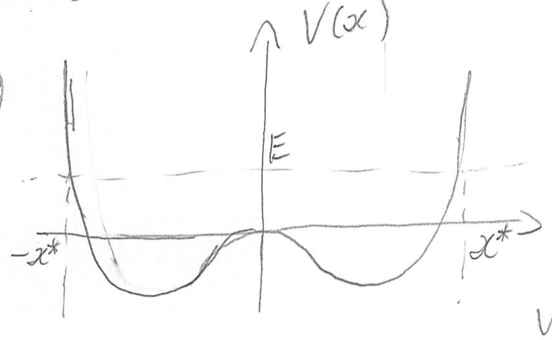
Caso $r>0$



Para uma dada energia E, o movimento é restrito a $(-x^*; x^*)$

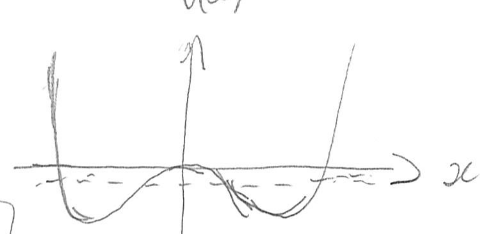
Caso $r<0$: duas situações distintas

$E>0$



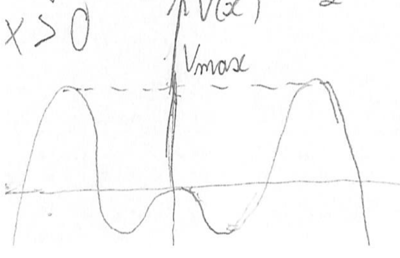
Movimento restrito entre $(-x^*, x^*)$

No caso $-\frac{r^2}{16u} < E < 0$



Movimento ficará circunscrito a uma região com $x>0$ ou $x<0$ de acordo com a condição inicial.

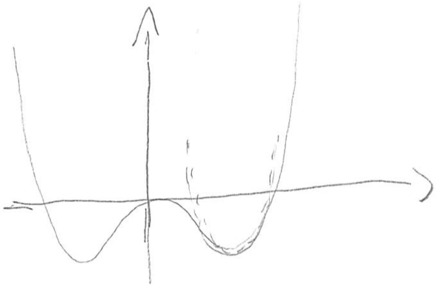
Pergunta: $V(x) = -\frac{|r|}{2}x^2 + ux^4 - \alpha x^6$, $x>0$



O que ocorre se $E > V_{max}$?

Caso a partícula fique sempre muito próxima de $x = \sqrt{-\frac{r}{4u}}$, podemos fazer a seguinte aproximação

$$x_0 = \sqrt{-\frac{r}{4u}}$$



$$V(x) \simeq V(x_0) + \underbrace{\frac{dV(x_0)}{dx}}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2V(x_0)}{dx}(x-x_0)^2$$

$\frac{d}{dx}[V(x_0)] = 0$: não gera força.

$$V(x) \simeq \frac{1}{2}(-2r)(x-x_0)^2 + \text{constante} \equiv \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \text{constante}$$

$$k = \frac{d^2V}{dx^2}(x_0)$$

Oscilador harmônico: teoria para qualquer sistema na proximidade de um ponto de equilíbrio estável.