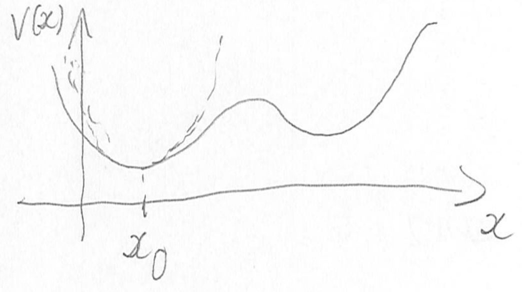
Seção 6: Osciladores harmônicos

6.1 Exemplos

De forma geral

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\cdot \vec{F}(\vec{r}\,')$$

Essa função escalar é sempre definível se $\nabla\times\vec{F}=0$. Focaremos no caso 1D. Neste caso, podemos esboçar $V(x)$ graficamente



(1) Encontre posição de equilíbrio

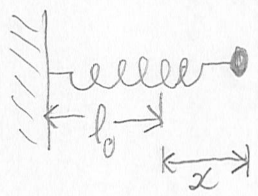
$$\frac{dV}{dx}(x_0) = 0$$

(2) Verifique se o equilíbrio é estável

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) \equiv k$$

Se $k>0$, o ponto de equilíbrio é estável.

6.1.1 Mola



l_0: comprimento natural da mola

x: distensão da mola

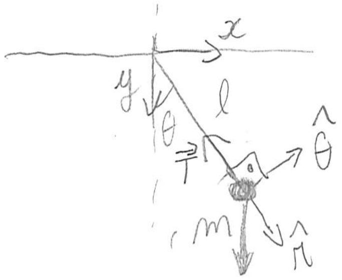
k: constante elástica

No caso, a constante k está relacionada com propriedades da mola (composição, formato, etc.). Neste curso, é dada como parâmetro do problema, encontrada por ajuste experimental.

$$F_x = m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \text{ ou } \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

ω_0: frequência natural da mola, $\omega_0^2 = \frac{k}{\cdot}$

6.1.2 Pêndulo



$$\vec{F} = m g \hat{y}$$

$V(y) = -m g y$ (Sobre o sinal: note que o importante é que $\vec{F} = -\nabla V$)

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\theta\, \hat{x} + \cos\theta\, \hat{y} \\ \hat{\theta} &= \cos\theta\, \hat{x} - \sin\theta\, \hat{y} \end{aligned}}$$

$\vec{T}$: tensão na corda. Força de vínculo associada ao fio inextensível

$y = l \cos\theta$: condição de fio inextensível

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}$$

$$= (m g \cos\theta - T)\hat{r} + (-m g \sin\theta)\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{F} = -m g \sin\theta\, \hat{\theta}}$$

Agora, para achar a equação de movimento

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \qquad \vec{r} = l \sin\theta\, \hat{x} + l \cos\theta\, \hat{y}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = l\dot{\theta} \cos\theta\, \hat{x} - l\dot{\theta} \sin\theta\, \hat{y}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = l\ddot{\theta}(\cos\theta\, \hat{x} - \sin\theta\, \hat{y}) - l\dot{\theta}^2(\sin\theta\, \hat{x} + \cos\theta\, \hat{y})$$

$$= l\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - l\dot{\theta}^2\,\hat{r}$$

$$\vec{F} = m l \ddot{\theta}\,\hat{\theta} - m l \dot{\theta}^2\,\hat{r}$$

$$= -m g \sin\theta\, \hat{\theta} + (m g \cos\theta - T)\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l}\sin\theta \\ m l \dot{\theta}^2 &= \frac{m v^2}{l} = T - m g \cos\theta \end{aligned}}$$

A segunda equação é a força centrípeta sobre o objeto. A primeira é a que normalmente chamamos de equação do pêndulo

$\sin\theta \approx \theta$: aproximação de pequenas oscilações

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

6.2 Oscilador harmônico amortecido

Estudaremos sistematicamente o seguinte problema

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-kx}_{\substack{\text{escpansão em} \\ \text{torno de equilí-} \\ \text{brio estável.}}} \quad \underbrace{-b\frac{dx}{dt}}_{\substack{\text{força de arraste} \\ \text{(resistência, dissipação)}}}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \equiv -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$$

Equação do oscilador harmônico amortecido

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Uma razão matemática para se focar neste problema é que ele é o problema com dissipação mais simples que pode ser resolvido com equações diferenciais ordinárias lineares. Retornaremos a este ponto posteriormente. Agora, vamos considerar a solução geral do problema usando o método de Euler.

Suponha que a EDO acima admita soluções

$$x(t) = Ae^{pt} \quad \text{(A constante)}$$

Queremos encontrar p.

$$\dot{x} = Ap e^{pt}, \quad \ddot{x} = A p^2 e^{pt}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = 0 \Longrightarrow (p^2 + 2\beta p + w_0^2) A e^{pt} = 0$$

Com $A \neq 0$, devemos encontrar a solução de

$$p^2 + 2\beta p + w_0^2 = 0$$

As raízes são

$$p_\pm = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4w_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$$

Encontramos naturalmente três casos de interesse

(i) $w_0 > \beta$ (sub-amortecido)

(ii) $w_0 < \beta$ (super-amortecido)

(iii) $w_0 = \beta$ (criticamente amortecido)

Vamos analisar caso a caso

6.2.1 Oscilador sub amortecido

$$w_0 > \beta \Longrightarrow \sqrt{\beta^2 - w_0^2} = i\sqrt{w_0^2 - \beta^2} \equiv i w_1$$

$$x_1(t) = e^{-\beta t + i w_1 t} = e^{-\beta t} e^{i w_1 t} \quad \text{ou} \quad x_2(t) = e^{-\beta t - i w_1 t} = e^{-\beta t} e^{-i w_1 t}$$

Relembre o que é a exponencial de um argumento imaginário

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \left(\text{note: } i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n\right.$$

$$= \cos(z) + i\sin(z)$$

Assim, encontramos

$$x_1(t) = e^{-\beta t}\left[\cos(\omega_1 t) + i\sin(\omega_1 t)\right]$$

$$x_2(t) = e^{-\beta t}\left[\cos(\omega_1 t) - i\sin(\omega_1 t)\right]$$

Resultado geral: considere $x_1(t)$ e $x_2(t)$ soluções de uma equação diferencial da forma

$$\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = 0$$

Neste caso, $A x_1(t) + B x_2(t)$ também é solução quando A e B são coeficientes constantes. Os valores de A e B são fixados por condições iniciais do problema.

Dito de outra forma, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ formam uma base no espaço vetorial definido pelo operador linear $\mathbb{L} = \frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_0(t)$

Podemos transformar bases de acordo com a conveniência do problema. Por exemplo, no caso do oscilador sub-amortecido, só estamos interessados na parte real, de modo que é conveniente definir

$$\boxed{\begin{aligned} x_c(t) &= \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t) \\ x_s(t) &= \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = e^{-\beta t}\sin(\omega_1 t) \end{aligned}}$$

A solução geral de $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ para $\omega_0 > \beta$ será

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,x_c(t) + B\,x_s(t) \\ &= e^{-\beta t}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right) \end{aligned}$$

Existe uma notação alternativa para essa solução geral

$$\cos(\omega_1 t - \delta) = \cos(\omega_1 t)\cos\delta + \sin(\omega_1 t)\sin\delta$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right)$$
$$= e^{-\beta t}\, C\cos(\omega_1 t - \delta), \quad \text{se} \quad A = C\cos\delta, \quad B = C\sin\delta$$

O problema mecânico é resolvido quando encontramos os parâmetros (A, B) ou (C, δ). Para isso, basta saber duas condições do problema. Por exemplo, podemos fixar $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$. Neste caso

$$x(t) = C e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t - \delta)$$
$$\dot{x}(t) = C e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega_1 t - \delta) - \omega_1\sin(\omega_1 t - \delta)\right]$$

$$x(0) = x_0 = C\cos\delta$$
$$\dot{x}(0) = v_0 = -C(\beta\cos\delta - \omega_1\sin\delta)$$
$$= C(\omega_1\sin\delta - \beta\cos\delta)$$

$$\frac{v_0}{x_0} = \omega_1\tan\delta - \beta \Rightarrow \tan\delta = \frac{1}{\omega_1}\left(\beta + \frac{v_0}{x_0}\right) \Rightarrow \boxed{\cos\delta = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \left(\beta + \frac{v_0}{x_0}\right)^2}}}$$

$$\boxed{C = \frac{x_0}{\cos\delta}}$$

6.2.2 Caso super-amortecido

Neste caso, $\omega_0 < \beta$ e

$$x_1(t) = e^{-\beta t + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t}, \quad x_2(t) = e^{-\beta t - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\, t}$$

A solução geral será dada por $x(t) = A x_1(t) + B x_2(t)$, com A e B descobertos conforme o caso acima. Voltaremos a esta solução mais tarde.

6.2.3 Caso criticamente amortecido

$\omega_0 = \beta$. Neste caso, $p_{\pm} = -\omega_0$ e teremos um problema. $x_1(t) = x_2(t) = e^{-\omega_0 t}$ são as soluções obtidas pelo método de Euler. Mas, essas são soluções linearmente dependentes $(x_1(t) - x_2(t) = 0)$, não formam base de um espaço vetorial bidimensional.

Solução: buscamos uma solução de

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

com a forma $x(t) = y(t)\, e^{-\omega_0 t}$

$$\dot{x} = e^{-\omega_0 t}(\dot{y} - \omega_0 y)$$

$$\ddot{x} = e^{-\omega_0 t}(\ddot{y} - 2\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y)$$

$$\Rightarrow e^{-\omega_0 t}\left[(\ddot{y} - \cancel{2\omega_0 \dot{y}} + \cancel{\omega_0^2 y}) + 2\omega_0(\cancel{\dot{y}} - \cancel{\omega_0 y}) + \cancel{\omega_0^2 y}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow y(t) = t$$

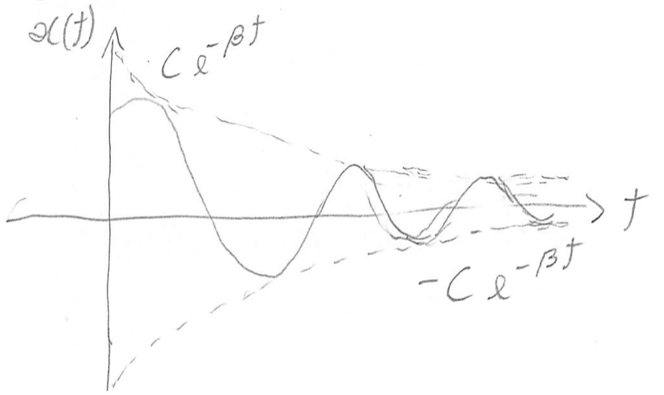
Solução geral será uma combinação linear de

$$x_1(t) = e^{-\omega_0 t} \quad e \quad x_2(t) = t\, e^{-\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = (At + B)\, e^{-\omega_0 t}}$$: caso criticamente amortecido

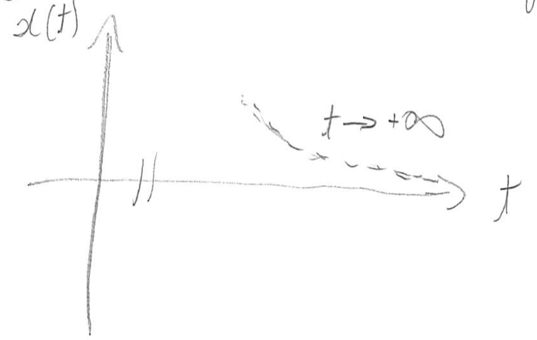
6.3 Análise gráfica, comparação dos três casos

Caso sub-amortecido



Único caso em que ainda é possível ver alguma oscilação. Amplitude do movimento decai exponencialmente com o tempo

Com relação aos casos super-amortecido e criticamente amortecido, temos qualitativamente o mesmo comportamento



Questão: o que decai mais rápido?

$$x_{super}(t) = A' e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + B' e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

$$= A' e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}\left(1 + \frac{B'}{A'} e^{-2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Estamos supondo $A' \neq 0$, um caso sem ajuste fino

$$x_{crit}(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} = At e^{-\omega_0 t}\left(1 + \frac{B}{At}\right) \qquad (A \neq 0)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|x_{crit}(t)|}{|x_{super}(t)|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|A t e^{-\omega_0 t}|}{|A' e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}|} = \left|\frac{A}{A'}\right| \lim_{t\to+\infty} t e^{[(\beta-\omega_0)-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}]t}$$

$$\beta^2-\omega_0^2 = (\beta-\omega_0)(\beta+\omega_0) > (\beta-\omega_0)^2$$

$$\sqrt{\beta^2-\omega_0^2} > \beta-\omega_0 \Rightarrow (\beta-\omega_0) - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} < 0$$

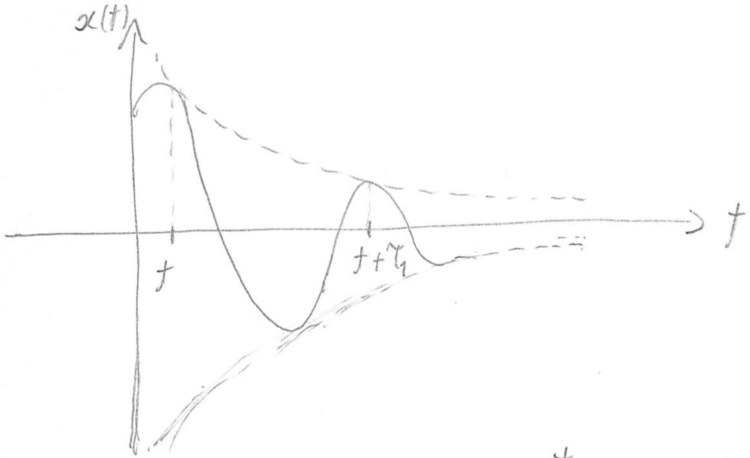
$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{|x_{crit}(t)|}{|x_{super}(t)|} = 0$$: o amortecimento crítico decai mais rápido

6.4 Decremento e fator de qualidade

Nesta seção, trataremos do caso sub-amortecido ($\omega_0 > \beta$). Neste caso, há uma frequência natural

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \qquad \left(\text{período associado: } \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}\right)$$

Definição: decremento é o fator de redução da amplitude do movimento após a passagem de um tempo τ_1



Amplitude : $\tilde{A}(t) = A e^{-\beta t}$

Decremento (d)

$$d = \frac{\tilde{A}(t)}{\tilde{A}(t+\tau_1)} = e^{\beta \tau_1}$$

Nesse regime de amortecimento, vamos inserir um termo forçante $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Definindo $f_0 = \frac{F_0}{m}$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Um teorema de equações diferenciais lineares nos diz que a solução da EDO acima tem a forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$: sol. da EDO homogênea ($f_0 = 0$)

$x_p(t)$: alguma solução particular da EDO

$\lim_{t \to +\infty} x_h(t) = 0$: solução é dita "transiente" Tende a desaparecer.

No limite $t \to +\infty$, a solução particular domina. A solução transiente ainda é importante para se ter a solução exata, dadas as condições iniciais

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \phi) + x_p(t)$$

Ansatz: $x_p(t) = C \cos(\omega t - \delta)$

$$\dot{x}_p(t) = -\omega C \sin(\omega t - \delta), \quad \ddot{x}_p(t) = -\omega^2 C \cos(\omega t - \delta)$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \delta) - 2\beta\omega \sin(\omega t - \delta) \right] C = f_0 \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t-\delta)=\cos(\omega t)\cos\delta+\sin(\omega t)\sin\delta$$
$$\sin(\omega t-\delta)=\sin(\omega t)\cos\delta-\cos(\omega t)\sin\delta$$

$$C\left[(\omega_0^2-\omega^2)(\cos(\omega t)\cos\delta+\sin(\omega t)\sin\delta)\right]$$
$$-2C\beta\omega\left[\sin(\omega t)\cos\delta-\cos(\omega t)\sin\delta\right]$$

$$=C\left\{\cos(\omega t)\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta+2\beta\omega\sin\delta\right]\right.$$
$$\left.+\sin(\omega t)\left[-2\beta\omega\cos\delta+(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta\right]\right\}$$

$$=f_0\cos(\omega t)$$

A expressão acima leva a

$$\boxed{\begin{aligned}&(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta-2\beta\omega\cos\delta=0\\&C\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta+2\beta\omega\sin\delta\right]=f_0\end{aligned}}$$

$$\tan\delta=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\Rightarrow\quad\sin\delta=\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

$$\cos\delta=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

A expressão acima permite chegar a

$$C=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}$$

Assim, $x_p(t)=\dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}}\cos(\omega t-\delta)$, $\delta=\tan^{-1}\left(\dfrac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$

Definição: A frequência de ressonância ω_R é a frequência tal que a amplitude de $x_p(t)$ é máxima

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4w^2\beta^2}}\right]_{w=w_R}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dw}\left[(w_0^2-w^2)^2+4w^2\beta^2\right]_{w=w_R}=0$$

$$-4w_R(w_0^2-w_R^2)+8w_R\beta^2=0$$

$$4w_R\left[2\beta^2+w_R^2-w_0^2\right]=0 \Rightarrow \boxed{w_R=\sqrt{w_0^2-2\beta^2}}$$

A amplitude máxima será $\dfrac{f_0}{2\beta\sqrt{\beta^2+w^2}}$

Calculamos a frequência de ressonância para a amplitude do movimento. Mas qual é a frequência na qual a energia cinética média será máxima

$$\dot{x}=-\frac{w f_0}{\sqrt{(w_0^2-w^2)^2+4w^2\beta^2}}\sin(wt-\delta)$$

Energia cinética:

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}=\frac{m}{2}\frac{w^2 f_0^2}{(w_0^2-w^2)^2+4w^2\beta^2}\sin^2(wt-\delta)$$

O valor médio de T, escrito como $\langle T\rangle$, é

$$\langle T\rangle=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\, T(t), \text{ em que } \tau=\frac{2\pi}{w}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\,\sin^2(wt-\delta)=\frac{1}{2} \Rightarrow \langle K\rangle=\frac{m f_0^2}{4}\frac{w^2 f_0^2}{(w_0^2-w^2)^2+4w^2\beta^2}$$

$$\left.\frac{d\langle K\rangle}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_E} = 0 = \left.\frac{2\omega\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\cancel{4\omega^2\beta^2}\right]-\omega^2\left[\cancel{8\omega\beta^2}-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2\right]^2}\right|_{\omega=\omega_E}$$

$$= 2\omega\left(\omega_0^4-\cancel{2\omega^2\omega_0^2}+\omega^4\right)+\left.4\omega^3(\cancel{\omega_0^2}-\omega^2)\right|_{\omega=\omega_E}$$

$$= \left.2\omega\left(\omega_0^4-\omega^4\right)\right|_{\omega=\omega_E}$$

$\Rightarrow \omega_E = \omega_0$: energia cinética será máxima quando a frequência do termo forçante for idêntica à frequência natural