Seção 7 Princípio da superposição. Funções de Green

7.1 Princípio da superposição

$$(1) \qquad \ddot{x}(t) + a_1(t)\,\dot{x}(t) + a_0(t)\,x(t) = f(t),$$

ou $\mathbb{L}\,x(t) = f(t)$, com $\mathbb{L} = \frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_0(t)$

a solução geral será

$$x(t) = A\,x_1(t) + B\,x_2(t) + x_p(t)$$

em que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes que satisfazem

$$\mathbb{L}\,x_1(t) = 0$$
$$\mathbb{L}\,x_2(t) = 0$$

e $x_p(t)$ é uma solução particular de

$$\mathbb{L}\,x_p(t) = f(t)$$

Podemos provar o seguinte

1) Se $x_p(t)$ é uma solução particular da equação (1), então $\alpha\,x_p(t)$ será uma solução particular de

$$\mathbb{L}\,x(t) = \alpha f(t)$$

2) Sejam $x_{p,1}(t)$ e $x_{p,2}(t)$ soluções particulares de

$$\mathbb{L}\,x(t) = f_1(t)$$
$$\mathbb{L}\,x(t) = f_2(t)$$

Neste caso, uma solução particular de

$$\mathbb{L}\,x(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

será $\alpha\,x_{p,1}(t) + \beta\,x_{p,2}(t)$

De maneira mais geral, se o termo forçante pode ser escrito como

$$\mathbb{L}\, x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(t) = f(t)$$

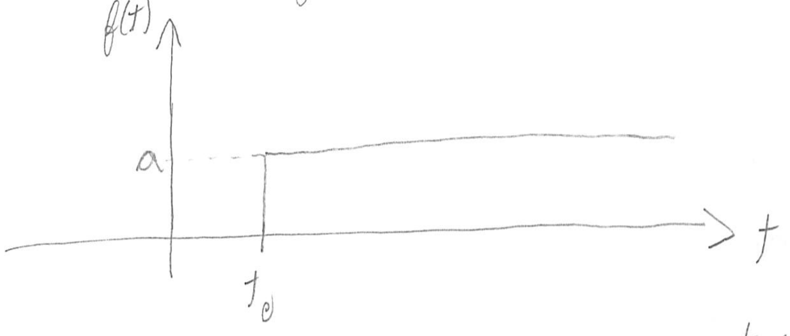
em que sabemos a solução particular $x_{p,n}(t)$ para cada n, então, a solução particular será

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_{p,n}(t).$$

Solução particular de uma combinação linear de termos forçantes será também uma combinação linear de soluções particulares de cada uma dessas forças. Este é o princípio da superposição.

Usaremos este princípio para construir uma solução geral para qualquer termo forçante

7.2 Função degrau



$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a, \qquad t > t_0$$

Condições iniciais: $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 0$. Consideramos o caso sub-amortecido

$$x(t) = \underbrace{e^{-\beta(t-t_0)}\left[A_1 \cos(\omega_1(t-t_0)) + A_2 \sin(\omega_1(t-t_0))\right]}_{x_h(t)} + \underbrace{\frac{a}{\omega_0^2}}_{x_p(t)}$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta(t-t_0)}\left[(\omega_1 A_2 - \beta A_1)\cos(\omega_1(t-t_0)) - (\omega_1 A_1 + \beta A_2)\sin(\omega_1(t-t_0))\right]$$

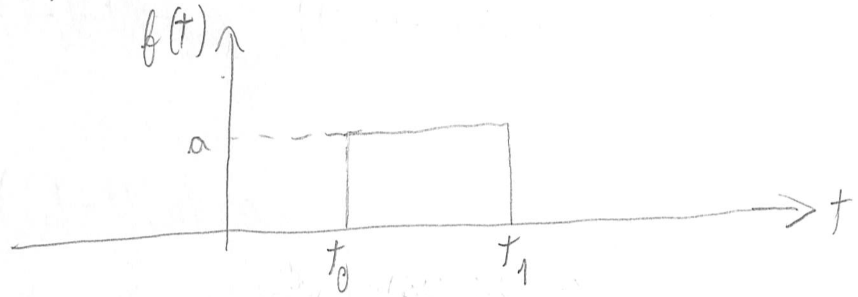
$$x(t_0) = 0 \Rightarrow A_1 + \frac{a}{w_0^2} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{a}{w_0^2}$$

$$\dot{x}(t_0) = 0 \Rightarrow w_1 A_2 + \beta \frac{a}{w_0^2} = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{\beta}{w_1}\frac{a}{w_0^2}$$

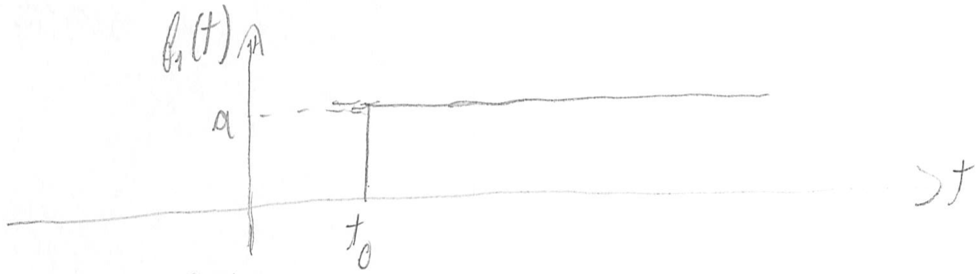
Portanto,

$$x(t) = \frac{a}{w_0^2}\left[1 - e^{-\beta(t-t_0)}\cos(w_1(t-t_0)) - \frac{\beta}{w_1} e^{-\beta(t-t_0)}\sin[w_1(t-t_0)]\right], t > t_0$$

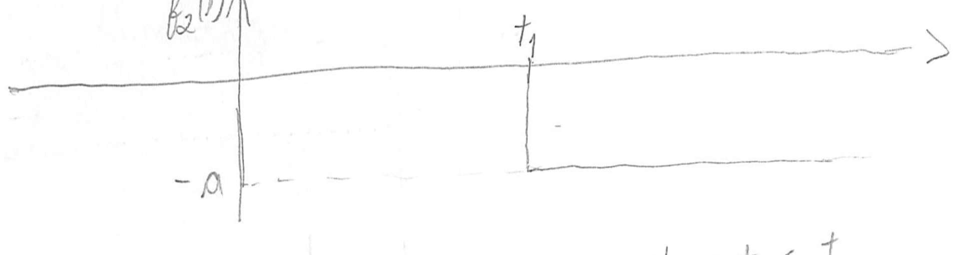
7.3 Função impulso



=



+



$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = a, \quad t_0 < t < t_1$$

Graficamente, vemos que a equação acima pode ser reescrita como

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ -a, & t > t_1 \end{cases}$$

Já temos a solução para $f_1(t)$. Desejamos uma solução particular de $f_2(t)$ chamada de $x_{p,2}(t)$ com as seguintes propriedades

$$x_{p,2}(t_1) = 0 \;,\; \dot{x}_{p,2}(t) = 0$$

$$t>t_1 : x_{p,2}(t) = -\frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta(t-t_1)}\cos(\omega_1(t-t_1)) - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_1)} \sin(\omega_1(t-t_1))\right]$$

Definimos $\tau = t_1 - t_0$, por conveniência, obtemos

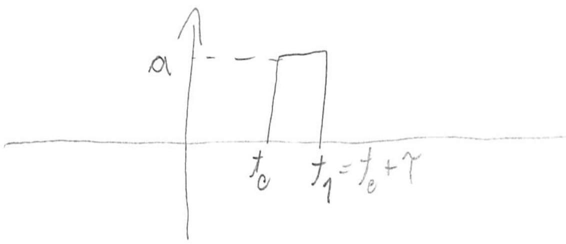
$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta(t-t_0)}\cos(\omega_1(t-t_0)) - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)}\sin(\omega_1(t-t_0))\right]$$

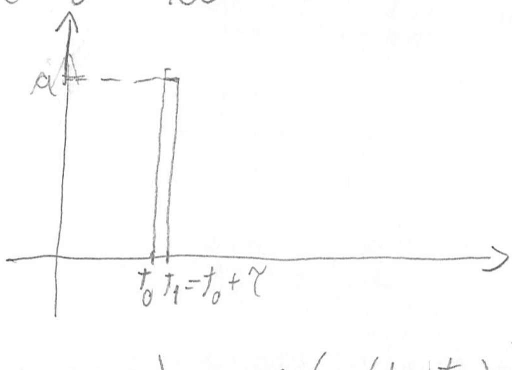
$$-\frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta(t-t_0-\tau)}\cos(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0-\tau)}\sin(\omega_1(t-t_0-\tau))\right]$$

$$= \frac{a\, e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_0^2}\left[\begin{array}{l} e^{\beta\tau}\cos(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \cos(\omega_1(t-t_0)) \\ + \frac{\beta}{\omega_1} e^{\beta\tau}\sin(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \frac{\beta}{\omega_1}\sin(\omega_1(t-t_0)) \end{array}\right]$$

7.4 "Função" delta de Dirac

Faça $a \to +\infty$, $\tau \to 0$, mas $a\tau = b$ = constante





$$x(t) = \frac{b\, e^{-\beta(t-t_0)}}{\omega_0^2} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left[\begin{array}{l} e^{\beta\tau}\cos(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \cos(\omega_1(t-t_0)) \\ + \frac{\beta}{\omega_1}\left(e^{\beta\tau}\sin(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \sin(\omega_1(t-t_0))\right) \end{array}\right]$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[e^{\beta\tau}\cos(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \cos(\omega_1(t-t_0))\right] = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left\{\begin{array}{l}(1+\beta\tau)\left[\cos(\omega_1(t-t_0)) + \sin(\omega_1(t-t_0))\omega_1 \right. \\ - \cos(\omega_1(t-t_0)) \end{array}\right.$$

$$= \beta\cos(\omega_1(t-t_0)) + \omega_1 \sin(\omega_1(t-t_0))$$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\frac{\beta}{\omega_1}\left[e^{\beta\tau}\sin(\omega_1(t-t_0-\tau)) - \sin(\omega_1(t-t_0))\right]$$

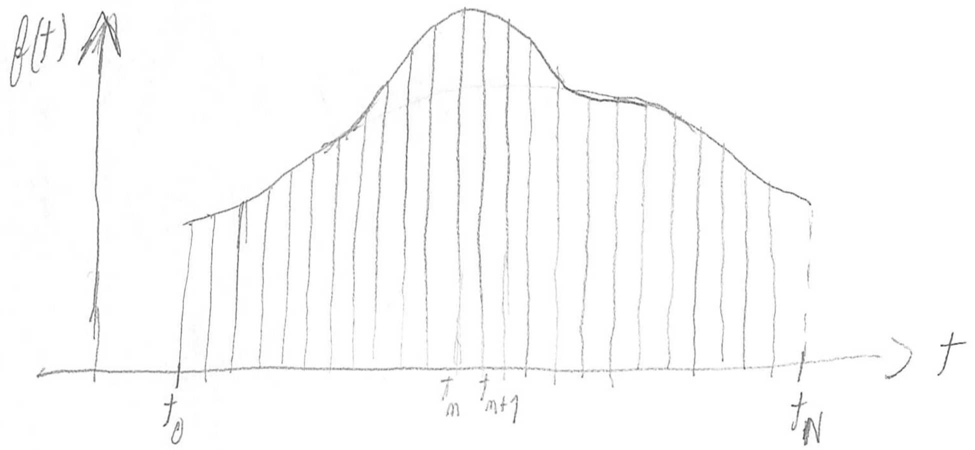
$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\frac{\beta}{\omega_1}\Big\{(1+\beta\tau)\left[\sin(\omega_1(t-t_0)) - \omega_1\tau\cos(\omega_1(t-t_0))\right) - \sin(\omega_1(t-t_0))\Big\}$$

$$= -\beta\cos(\omega_1(t-t_0)) + \frac{\beta^2}{\omega_1}\sin(\omega_1(t-t_0))$$

$$x(t) = \frac{b}{\omega_0^2}e^{-\beta(t-t_0)}\sin(\omega_1(t-t_0))\underbrace{\left(\omega_1 + \frac{\beta^2}{\omega_1}\right)}_{= \frac{\omega_1^2+\beta^2}{\omega_1} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1}}$$

$$x(t) = \frac{b}{\omega_1}e^{-\beta(t-t_0)}\sin(\omega_1(t-t_0))$$

7.5 Função arbitrária. Método da função de Green



$t_{n+1} - t_n = \Delta t, \ \forall n$

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \sum_{n=1}^{N} I_n(t_n)$$

$$I_n(t_n) = \begin{cases} f(t_n), & t_{n-1} < t < t_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos usar o resultado da "função" δ de Dirac para calcular a resposta forçante de $I_n(t)$:

$$x_n(t) = \frac{\Delta t\, f(t_n)}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1 (t-t_n)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{N} \Delta t \frac{f(t_n)}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1 (t-t_n)$$

Limite $N \to \infty$: integral de Riemann

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t_f} dt' \frac{f(t')}{\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin(\omega_1(t-t'))$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ m f(t), & t_0 < t < t_f \\ 0, & t > t_f \end{cases}$$

$$G(t,t') \equiv \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_1 (t-t'), & t \geq t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, F(t')\, G(t,t')}$$