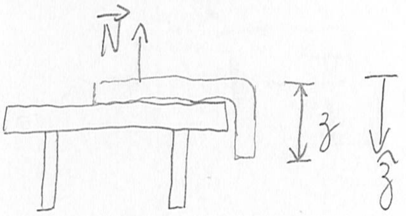
Seção 8: Sistemas de massa variável

O tema unificador da segunda parte do curso é a mecânica de sistemas que podem ser pensados como a soma de sistemas menores. Antes de derivar métodos específicos para estes problemas, é útil considerar os problemas de massa variável, que ainda podem ser resolvidos com leis de Newton

8.1 Corrente deslizando de uma mesa

Considere uma corrente uniforme, de comprimento total a e massa m. No instante $t=0$, a corrente está em repouso e um pedaço dela, de comprimento b, está sobre uma mesa. Calcule o tempo necessário para que a corrente deslize da mesa.

Densidade linear: $\lambda = \dfrac{m}{a}$



$$\vec{F} = (\underbrace{\lambda a}_{\text{massa total}}\, g - N)\,\hat{z}$$

$$N - \lambda(a-z)g = 0 \Rightarrow N = \lambda(a-z)g$$

$$\therefore \boxed{\vec{F} = \lambda z g\,\hat{z}}$$

$$F_z = m\ddot{z} \Rightarrow \lambda z g = \lambda a \ddot{z} \Rightarrow \ddot{z} = \frac{g}{a} z$$

$$z(t) = A e^{\sqrt{\frac{g}{a}}t} + B e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}t}$$

Das condições iniciais do problema, $z(0) = b$, $\dot{z}(0) = 0$

$$\begin{matrix} A + B = b \\ \sqrt{\frac{g}{a}}(A-B) = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = B = \frac{b}{2} \Rightarrow z(t) = \frac{b}{2}\left(e^{\sqrt{g/a}\,t} + e^{-\sqrt{g/a}\,t}\right)$$
$$= b\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$$

Gostaríamos de determinar o instante T tal que $z(T)=a$

$$z(T) = a = \frac{b}{2}\left(e^{\sqrt{g/a}\,T} + e^{-\sqrt{g/a}\,T}\right)$$

$$\equiv \frac{b}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$$

$$\alpha^2 - \frac{2}{b}a\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{2\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = e^{\sqrt{g/a}\,T}$$

Encontramos

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\ \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)$$

Por que excluímos a solução com $\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$?

$$\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \leq 1 \iff \frac{a}{b} \leq 1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

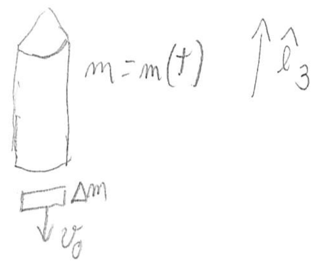
$$\iff \frac{a^2}{b^2} \leq 1 + 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a^2}{b^2} - 1 \iff 0 \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

Sabemos que $0 \leq \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ é sempre verdadeira pois $b < a$.

Problema: resolva a mesma questão quando há um atrito dinâmico μ_c entre a corda e a mesa.

8.2 Foguetes

Um foguete de massa inicial m_0 expele uma massa de gás a uma taxa constante α com uma velocidade v_0 em relação ao foguete. Considere que a aceleração gravitacional seja constante (ou seja, o foguete permanece próximo da superfície da Terra. Encontre a equação de movimento do foguete



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_3$$

Na direção $\hat{e}_3$, $m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = F_{e_3}$, $m(t) = m - \alpha t$

O foguete vai sentir duas forças.

* A força peso $-mg\,\hat{e}_3$

* A força devido ao gás liberado. O momento desse gás

$$\Delta\vec{p}_{gas} = \Delta m\,(v - v_0)\,\hat{e}_3$$: momento de uma determinada quantidade de gás em relação ao referencial da Terra

Pela terceira lei de Newton

$$\vec{F}_{gás\to foguete} = -\frac{\Delta\vec{p}_{gas}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}(v - v_0)\,\hat{e}_3 = -\alpha(v - v_0)\,\hat{e}_3$$

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = -mg - \alpha(v - v_0)$$

$$\therefore\ m\frac{dv}{dt} = \alpha v_0 - mg$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha v_0}{m} - g = \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t} - g$$

$$\int_0^v dv' = \int_0^t dt' \left(\frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t'} - g\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = -gt + v_0 \int_0^t dt' \frac{\alpha/m_0}{1-(\alpha/m_0)t'}$$

$$= -gt - v_0 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t'\right)\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -gt - v_0 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) = -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)}$$

Para encontrar a altitude, utilizamos

$$h(t) = \int_0^t dt'\, v(t') = -\frac{gt^2}{2} - v_0 \int_0^t dt' \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t'\right)$$

$$\int_0^t dt' \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t'\right) = -\frac{m_0}{\alpha}\int_1^{1-\frac{\alpha}{m_0}t} du' \ln u' = \frac{m_0}{\alpha}\int_{1-\frac{\alpha}{m_0}t}^{1} du' \ln u'$$

$1 - \frac{\alpha}{m_0}t' = u'$

$dt' = -\frac{m_0}{\alpha} du'$

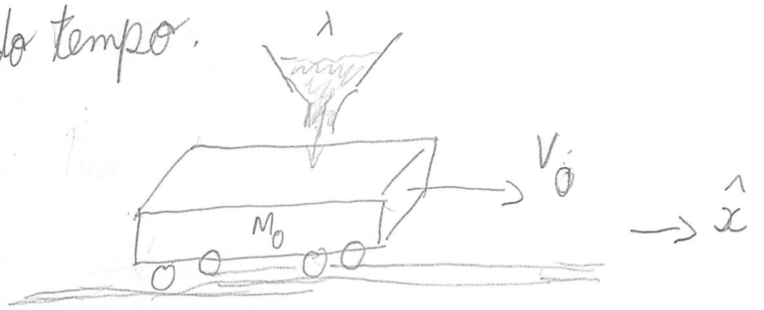
$$= \frac{m_0}{\alpha}\left[u \ln u - u\right]_{1-\frac{\alpha}{m_0}t}^{1} = \frac{m_0}{\alpha}\left[-1 - \left(1-\frac{\alpha t}{m_0}\right)\ln\left(1-\frac{\alpha t}{m_0}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right)\right]$$

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t\right) \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t\right)$$

Exercício: considere que a massa de combustível disponível para o foguete seja $\tilde{m}$. Calcule a altura alcançada pelo foguete no momento em que todo combustível for consumido.

Seção 8.3: Carrinho de carga de massa variável

Um carrinho de carga de massa M_0 move sobre trilhos perfeitamente lisos com uma velocidade V_0. Na posição $x=0$ e tempo $t=0$, o carrinho é carregado com areia a uma taxa constante λ. Determine a posição do carrinho como função do tempo.



Não há forças atuando no carrinho na direção $\hat{x}$.

Nesta direção

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0 \implies mv = \text{constante} = M_0 V_0$$

Como $m = M_0 + \lambda t \implies v = \dfrac{M_0 V_0}{M_0 + \lambda t} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\int_0^{x(t)} dx' = \int_0^t dt' \frac{M_0 V_0}{M_0 + \lambda t'} = \frac{M_0 V_0}{\lambda} \int_0^t \frac{dt'}{\frac{M_0}{\lambda} + t'} = \frac{M_0 V_0}{\lambda} \ln\left(\frac{\frac{M_0}{\lambda} + t}{\frac{M_0}{\lambda}}\right)$$

$$x(t) = \frac{M_0 V_0}{\lambda} \ln\left(\frac{M_0 + \lambda t}{M_0}\right)$$