Seção 9: Quantidades mecânicas de um sistema de muitas partículas

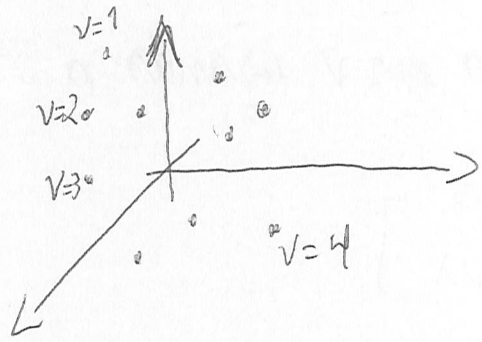
9.1 Forças internas e externas; Centro de massa e momento linear

Uma partícula: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$

m: massa da partícula

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$: velocidade. $\vec{r}$ é o vetor posição em relação a um referencial inercial

N-partículas



Força sobre a ν-ésima partícula ($\vec{F}_\nu$)

$$\vec{F}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{N} \vec{F}_{\nu\lambda} + \vec{F}_\nu^{(ext)} = \frac{d\vec{p}_\nu}{dt}$$

$\vec{F}_{\nu\lambda}$: força produzida pela λ-ésima partícula sobre ν

$\vec{F}_\nu^{(ext)}$: força sobre a ν-ésima partícula devido a um agente distinto das N partículas ("força externa")

As N-partículas podem interagir umas com as outras
- * Força gravitacional
- * Força elétrica
- * Força de van der Waals
- * Forças nucleares

Em muitas ocasiões estaremos interessados no sistema como todo ao invés de considerarmos elemento a elemento. Neste caso, é conveniente definir alguns parâmetros

$\boxed{M = \sum_\nu m_\nu \text{ : massa total}}$

$\boxed{\vec{R} = \dfrac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \text{ : centro de massa (CM)}}$

Considere que a massa dos elementos do sistema não varie

$$\vec{F}_\nu = \frac{d\vec{p}_\nu}{dt} = m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = m_\nu \frac{d^2\vec{r}_\nu}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\nu \vec{r}_\nu)$$

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu = \sum_\nu \frac{d^2}{dt^2}(m_\nu \vec{r}_\nu) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left[M\vec{R}\right]$$

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$: recuperamos a segunda lei de Newton para o CM

Podemos simplificar o somatório em ν usando a 3^a Lei de Newton

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu = \sum_\nu \left[\vec{F}_\nu^{(ext)} + \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda}\right]$$

$$= \sum_\nu \vec{F}_\nu^{ext} + \sum_\nu \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda}$$

Supomos que $\vec{F}_{\nu\nu} = 0$ e a 3^a lei dá $\vec{F}_{\nu\lambda} + \vec{F}_{\lambda\nu} = 0$.

Portanto, $\sum_\nu \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda} = 0$.

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu^{(ext)} \equiv \vec{F}^{(ext)} \Rightarrow \boxed{\sum_\nu \vec{F}_\nu = \vec{F}^{ext}}$$

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext}}$$

2^a lei de Newton para muitas partículas assumindo 3^a lei

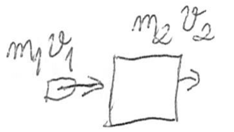
Podemos considerar o caso particular $\frac{dM}{dt} = 0$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(M\frac{d\vec{R}}{dt}\right) \equiv \frac{d\vec{P}}{dt}$$: $\vec{P}$ é o momento linear total

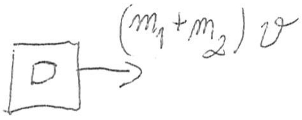
Se $\vec{F}^{ext}=0$, $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ é constante de movimento.

Exemplos de sistemas em que o momento linear é considerado conservado

(i) Colisão



Antes

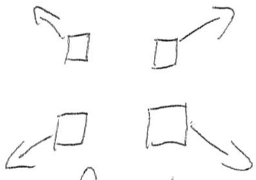


Depois

Apenas forças internas precisam ser consideradas no instante da colisão. Mais precisamente, consideramos a colisão tão rápida que qualquer variação de momento devido a forças externas são desprezíveis

(ii) Explosão

Antes



Depois

Explosões são geradas por forças internas.

9.2 Energia de sistema de muitas partículas. Definição de corpo rígido

$$\vec{F}_\nu^{(ext)} + \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu)$$: força sobre ν-ésima partícula

$$\dot{\vec{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}\right)$$

Assim
$$\vec{F}_\nu^{(ext)} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \sum_\lambda \vec{F}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}\right) = \frac{dT_\nu}{dt}$$

Como no caso do momento linear, somaremos sobre ν

$$\sum_\nu \vec{F}_\nu^{(ext)} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \sum_{\lambda,\nu} \vec{F}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_\nu \frac{dT_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu T_\nu\right) \equiv \frac{dT}{dt}$$

Integra no tempo e usa
$$\dot{\vec{r}}_\nu \, dt = d\vec{r}_\nu$$

$$(*) \quad T(t_2) - T(t_1) = \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r}_\nu \cdot \vec{F}_\nu^{(ext)} + \sum_{\nu\lambda} \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r}_\nu \cdot \vec{F}_{\nu\lambda}$$

$$\equiv W^{(ext)} + W^{int}$$

Obs: $\int_{t_1}^{t_2}$ é um abuso de notação para $\int_{\vec{r}_\nu(t_1)}^{\vec{r}_\nu(t_2)}$

Seguindo as discussões que fizemos para sistemas de uma partícula, ~~[illegible]~~ consideraremos apenas forças externas conservativas

$$\vec{F}_\nu^{(ext)} = -\nabla_\nu V^{(ext)} \qquad \nabla_\nu = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z_\nu}$$

Assim
$$W^{(ext)} = -\sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r}_\nu \cdot \nabla_\nu V^{(ext)} = -\sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} dV_\nu^{ext} = -\sum_\nu \left[V^{(ext)}(t_2) - V^{(ext)}(t_1)\right]$$

$$\Rightarrow W^{(ext)} = V^{(ext)}(t_1) - V^{(ext)}(t_2)$$

Sobre as forças internas, vamos assumir que a força entre ν e λ seja <u>central</u>

$$V_{\lambda\nu}^{(int)}(\vec{r}_{\lambda\nu}) = V_{\lambda\nu}^{(int)}(r_{\lambda\nu}) = V_{\nu\lambda}^{(int)}(r_{\nu\lambda})$$

$$\vec{r}_{\lambda\nu} = |\vec{r}_{\lambda} - \vec{r}_{\nu}| = \sqrt{(x_{\lambda}-x_{\nu})^2+(y_{\lambda}-y_{\nu})^2+(z_{\lambda}-z_{\nu})^2}$$

Essa escolha foi feita para ter potenciais que automaticamente satisfaçam a 3ª Lei de Newton

$$\vec{F}_{\nu\lambda} = -\nabla_{\nu} V_{\nu\lambda}^{(int)}(r_{\nu\lambda})$$

$$= -\hat{x}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial x_{\nu}}(r_{\nu\lambda}) - \hat{y}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial y_{\nu}}(r_{\nu\lambda}) - \hat{z}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial z_{\nu}}(r_{\nu\lambda})$$

$$= +\hat{x}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial x_{\lambda}}(r_{\nu\lambda}) + \hat{y}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial y_{\lambda}}(r_{\nu\lambda}) + \hat{z}\frac{\partial V_{\nu\lambda}^{(int)}}{\partial z_{\lambda}}(r_{\nu\lambda})$$

$$= +\hat{x}\frac{\partial V_{\lambda\nu}^{(int)}}{\partial x_{\lambda}}(r_{\lambda\nu}) + \hat{y}\frac{\partial V_{\lambda\nu}^{(int)}}{\partial x_{\lambda}}(r_{\lambda\nu}) + \hat{z}\frac{\partial V_{\lambda\nu}^{(int)}}{\partial z_{\lambda}}(r_{\lambda\nu})$$

$$= \nabla_{\lambda} V_{\lambda\nu}^{(int)} = -\vec{F}_{\lambda\nu}$$

O trabalho interno é dado por

$$W^{(int)} = \sum_{\nu,\lambda}\int d\vec{r}_{\nu}\cdot\vec{F}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left[\sum_{\nu,\lambda}\int d\vec{r}_{\nu}\cdot\vec{F}_{\nu\lambda} + \sum_{\nu\lambda}\int d\vec{r}_{\lambda}\cdot\vec{F}_{\lambda\nu}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu,\lambda}\int(d\vec{r}_{\nu} - d\vec{r}_{\lambda})\cdot\vec{F}_{\nu\lambda}(\vec{r}_{\nu\lambda})$$

Note que a força interna é função de $\vec{r}_{\nu\lambda} = \vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda$, cujo diferencial é $d\vec{r}_{\nu\lambda} = d\vec{r}_\nu - d\vec{r}_\lambda$

$$W^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\lambda} \int d\vec{r}_{\nu\lambda} \cdot \vec{F}_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda})$$

Escrevendo em termos do potencial interno

$$W^{(int)} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} \int \nabla_{\nu\lambda} V_{\nu\lambda}^{(int)} \cdot d\vec{r}_{\nu\lambda}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\nu\lambda} \int dV_{\nu\lambda}^{(int)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} \left(V_{\nu\lambda}^{(int)}(t_2) - V_{\nu\lambda}^{(int)}(t_1) \right)$$

Retornando à Eq. (*)

$$T(t_2) - T(t_1) = W^{(ext)} + W^{(int)}$$

$$= V^{(ext)}(t_1) - V^{(ext)}(t_2)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} \left[V_{\nu\lambda}^{(int)}(t_1) - V_{\nu\lambda}^{(int)}(t_2) \right]$$

Manipulando a equação acima

$$T(t) + V^{(ext)}(t) + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\lambda} V_{\nu\lambda}^{(int)}(t) = \text{constante}$$

$$= T + V^{(ext)} + V^{(int)}$$

Se as forças externas e internas podem ser expressas em termos de energia potencial, então a energia se conserva. Isso permite classificar problemas de acordo com o princípio de conservação de energia.

Energia não se conserva:

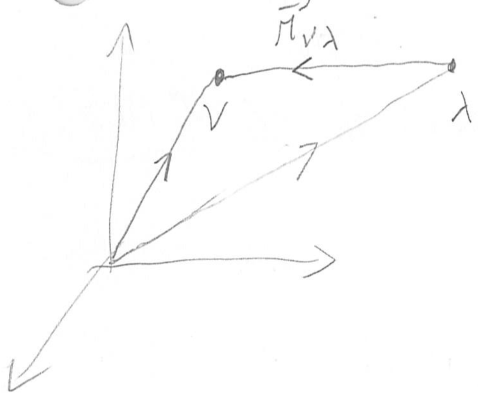
* Colisão balística

Antes Depois

A força interna entre os dois corpos envolve atrito. Atrito não pode ser escrito em termos de $V_{\nu\lambda}^{(int)}$

Energia se conserva:

* Problemas de gravitação



$\vec{F}_{\nu\lambda}$: força que λ exerce sobre ν

$$\vec{F}_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda}) = -\frac{G m_\nu m_\lambda}{r_{\nu\lambda}^2}\,\hat{r}_{\nu\lambda}$$

$$V_{\nu\lambda}^{(int)}(r_{\nu\lambda}) = -\frac{G m_\nu m_\lambda}{r_{\nu\lambda}}$$

Colisões entre corpos celestes são mediadas pela gravidade. Este tipo de colisão será "elástica", ou seja, conservará energia.

Voltemos à fórmula da energia potencial interna e consideremos a integral em mais detalhe

$$W^{(int)} = \frac{1}{2}\sum_{\nu\lambda}\int d\vec{r}_{\nu\lambda}\cdot\vec{F}_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda})$$

Consideremos o caso em que $r_{\nu\lambda}$ é constante

$(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda) \cdot (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda) = R$ (constante)

$(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda + d\vec{r}_{\nu\lambda}) \cdot (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda + d\vec{r}_{\nu\lambda}) = R$ (alteração permitida das posições relativas)

$\Rightarrow d\vec{r}_{\nu\lambda} \cdot (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda) = 0$

$d\vec{r}_{\nu\lambda}$ tem que ser perpendicular a $\vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda$. Mas, estamos considerando $\vec{F}_{\nu\lambda} \parallel \vec{r}_\nu - \vec{r}_\lambda$. Portanto

Se $r_{\nu\lambda}$ = constante para todo ν, λ $\quad W^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\lambda} \int d\vec{r}_{\nu\lambda} \cdot \vec{F}_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda})$

será igual a zero: este sistema é chamado de <u>corpo rígido</u>