

Notas de aula

Física Geral 2 – F 228

Odilon D. D. Couto Jr.

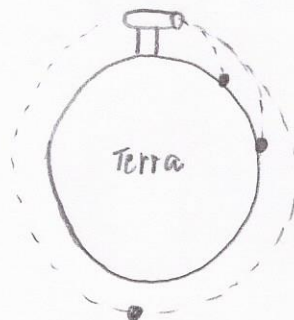
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

<http://sites.ifi.unicamp.br/odilon>

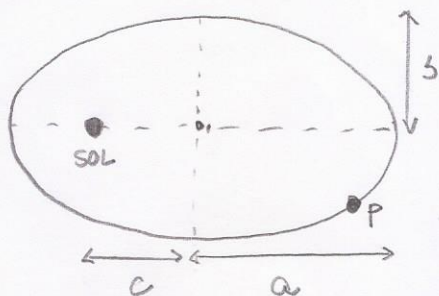
AULA 1 - GRAVITAÇÃO

"Definição" de cair:

$\Rightarrow$ cair $\equiv$ orbitar



1ª Lei de Kepler: "As órbitas descritas pelos planetas ao redor do Sol são elipses, com o Sol num dos focos."



Excentricidade da elipse: $e = \frac{c}{a}$ $0 \leq e < 1$

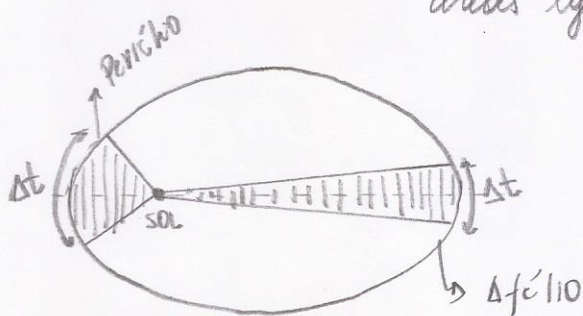
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056

Excetuando Mercúrio e...

$e = 0 \Rightarrow$ circunferência

$\hookrightarrow$ aproximação razoável

2ª Lei de Kepler: "O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais."



3ª Lei de Kepler: "Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como o cubo de suas distâncias médias ao Sol."

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \Rightarrow \frac{R_1^3}{T_1^2} = \text{constante}$$

As leis de Kepler foram obtidas a partir de dados precisos e em grande quantidade. Uma interpretação física de carácter geral deveria ser capaz de contemplar as conclusões obtidas por Kepler.

GRAVITAÇÃO DE NEWTON - ÓRBITAS CIRCULARES

Com boa aproximação $e=0$. Pela 2ª lei de Kepler $\Rightarrow$ movimento é uniforme.
Para MCU:

$$\vec{a} = -\omega^2 R \hat{r} = -\frac{4\pi^2 R}{T^2} \hat{r} = -\frac{4\pi^2 R^3}{T^2 R^2} \hat{r} = -\frac{C}{R^2} \hat{r}$$

Para um planeta de massa m , a força centrípeta é dada por:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\frac{Cm}{R^2} \hat{r}$$

Pela 3ª lei de Newton o planeta exerce uma força de igual magnitude no Sol de massa M , levando Newton à conclusão

$$\boxed{\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r}}$$

G é a constante gravitacional $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

↳ BALANÇA DE CAUBENDISH

↳ Pesagem da terra

TRIUNFOS DA GRAVITAÇÃO DE NEWTON:

i) Aceleração da gravidade na superfície da Terra:

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \hat{r} = -mg \hat{r} \quad g = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \text{que na verdade é uma medida de } M_T$$

$$\rightarrow \text{IGUALDADE SATISFEITA: } mg = m \frac{4\pi^2 R}{T^2} = m \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 R^2}$$

$$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

↳ Eratostenes

ii) Satélites naturais: Para um satélite de massa m :

$$F = -ma = -m\omega^2 R = -m \frac{4\pi^2}{T^2} R = -G \frac{M_T m}{R^2}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T}} R^{\frac{3}{2}} = 3,14 \times 10^{-7} R^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \text{período não depende da massa do satélite.}$$

iii) Analogamente, podemos obter a massa do sol M_S

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{GM_S}{R^2} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

$$M_S \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$T = 1 \text{ ano}$$

R = distância da Terra ao Sol

$$R = 1,496 \times 10^8 \text{ km} \Rightarrow \text{mov. dos planetas}$$

Outras questões que poderiam ser explicadas:

Marés

Forma da Terra

Precensão do equinócio

iv) Outro ponto crucial foi que a gravitação de Newton permitiu prever a existência de outros planetas a partir de discrepâncias nas órbitas esperadas

$\Rightarrow$ Urano, Netuno

v) 2ª lei de Kepler:

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2m} \vec{F} \times m d\vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times m \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{\vec{L}}{2m} = \vec{c} \vec{h}$$

A gravitação de Newton, no entanto, traz problemas matemáticos quando mais de 2 corpos estão presentes. Para nossa sorte, $M_s \gg$ massa de qualquer outro planeta do sistema solar. Assim, a presença de outros corpos pode ser tratada perturbativamente.

1675 $\Rightarrow$ Römer mediu pela 1ª vez a velocidade da luz $c \approx \frac{3}{4} c$ $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MASSA.

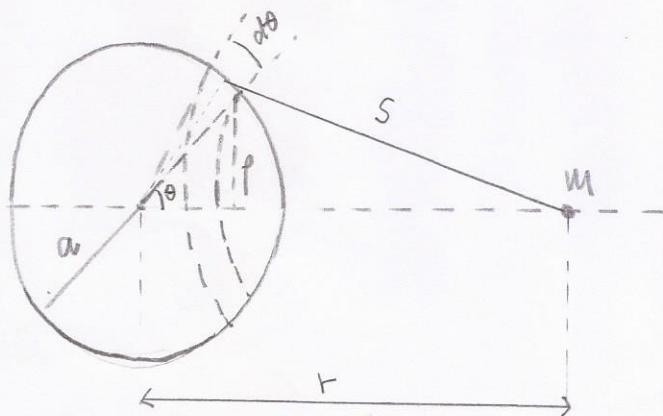
CASCA ESFÉRICA

A força e o potencial gravitacional estão relacionados:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow U(r) - U(r_0) = - \int_{r_0}^r \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \quad \text{se } F = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$U(r) - U(r_0) = G M m \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = -G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \Rightarrow U(r) = -\frac{G M m}{r}$$

Para uma casca esférica simétrica de massa M e um corpo de massa m :



A distância entre m e qualquer ponto da casca é s

$\hookrightarrow dm$

$$\Rightarrow dU = -\frac{G dM m}{s} = -\frac{G m dM}{s}$$

Além disso: $\frac{M}{4\pi a^2} = \frac{dM}{2\pi p d\theta} \Rightarrow dM = \frac{M p d\theta}{2a} = \frac{M \sin \theta d\theta}{2}$

Além disso, pela lei dos cossenos:

$$s^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \Rightarrow 2s ds = 2ar \sin \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{s}{ar \sin \theta} ds$$

$$\Rightarrow dU = -\frac{Gm}{s} dM = -\frac{Gm}{s} \frac{M}{L} \sin \theta \cdot \frac{s}{ar \sin \theta} ds = -\frac{GMm}{Lar} ds$$

$$\Rightarrow U - U_0 = -\frac{GMm}{Lar} \int_{s_0}^s ds$$

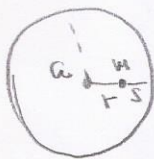
Para a massa fora da esfera, i.e., $r > a \Rightarrow s_0 = r - a$ ($\theta = 0$)
 $s = r + a$ ($\theta = \pi$)

$$\text{Tomando } U_0 = 0 \Rightarrow U = -\frac{GMm}{Lar} [r + a - (r - a)] = -\frac{GMm}{Lar} 2a = -\frac{GMm}{r}$$

$\Rightarrow$ O sistema se comporta como se toda a massa de terra estivesse no centro.

$$\text{Se } r < a \Rightarrow s = a + r \Rightarrow U = -\frac{GMm}{Lar} [r + a - (a - r)] = -\frac{GMm}{La} = \text{cte}$$

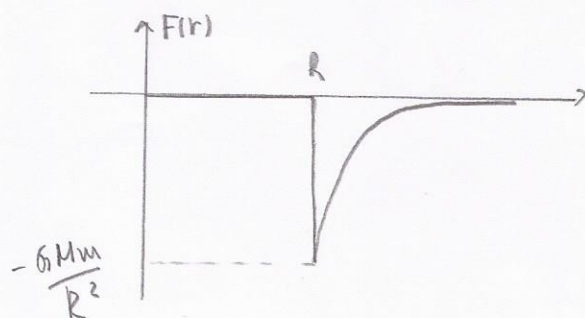
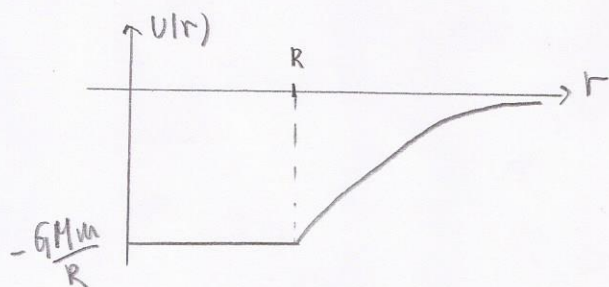
sendo assim:



$$r > a \Rightarrow F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$r < a \Rightarrow F = 0$$

Se $a = R = \text{raio da Terra}$



ESFERA MÁGICA

Para $r > a \Rightarrow$ resultado análogo à carga $\Rightarrow$ apenas agna $M =$ massa da esfera.

Se $r < a \Rightarrow F = -G \frac{\tilde{M} m}{r^2}$ onde $\tilde{M} = M(r < a)$

Se a densidade é constante:

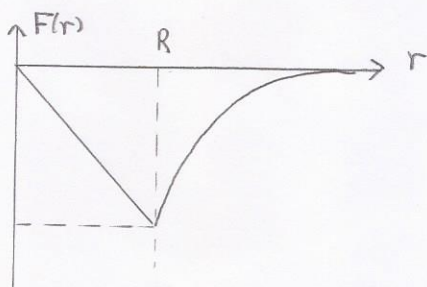
$$\rho_0 = \frac{M}{4\pi R^3} = \frac{\tilde{M}}{4\pi r^3} \Rightarrow \tilde{M} = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow F = -G \frac{M m}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = -G \frac{M m}{R^3} r$$

$$\Rightarrow U(r) - U(R) = - \int_R^r F(r) dr = \frac{G M m}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{G M m}{R^3} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right]$$

$$\text{Com } U(R) = -\frac{G M m}{R} \Rightarrow U(r) = -\frac{G M m}{R} - \frac{G M m}{2R} + \frac{G M m}{2R^3} r^2 = -\frac{3}{2} \frac{G M m}{R} + \frac{G M m}{2R^3} r^2$$

Seendo assim temos:



Isso nos leva ao conceito de velocidade de escape:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{G M m}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}} \approx 11,2 \text{ km/s}$$

