

Notas de aula

Física Geral 2 – F 228

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

<http://sites.ifi.unicamp.br/odilon>

A hidrodinâmica, além de ser um assunto com muitos pontos em aberto, oferece uma série de complicações físicas e matemáticas.

Por este motivo, normalmente adotamos simplificações para entender algumas situações. Nesta aula consideramos as seguintes:

- 1) Fluido incompressível
- 2) Temperatura constante
- 3) Estacionário: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ e $p = p(r)$

3a) Não fluxo turbulento $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ com variações abruptas no espaço e no tempo.

4) Irrotacional: sem vórtices.

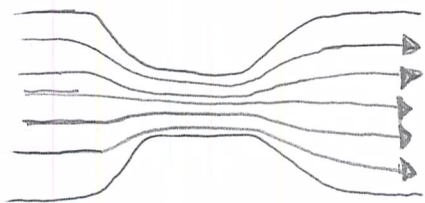
5) Laminar

Sendos assim, a única diferenciação que fazemos é:

FLUIDO IDEAL: Não-viscoso

FLUIDO REAL: viscosidade μ

Para descrever o movimento de fluidos normalmente usamos o conceito de linhas de corrente.



→ linhas de corrente estão relacionadas ao campo de velocidade em um fluido.

→ Para um escoamento laminar as linhas de corrente não se cruzam.

→ Todo de corrente não varia com o tempo.

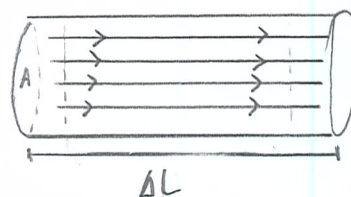
FLUXO DE FLUIDOS IDEAIS

Com essa aproximação, alguns fluidos podem ser considerados ideais.
Ex: água

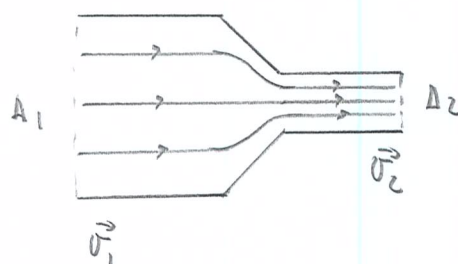
EQ. DE CONTINUIDADE

Para um tubo de seção transversal A , cuja velocidade de escoamento é v , a massa de fluido que percorre uma distância ΔL é:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta L = \rho A v \Delta t$$



Se o tubo sofre um estrangulamento, mas continua estacionário, a mesma massa deve passar por A_1 e A_2 no mesmo intervalo Δt .



$$\Delta m = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Se o fluido é incompressível:

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

O produto Av é uma constante e é chamada de vazão:

$$R = Av$$

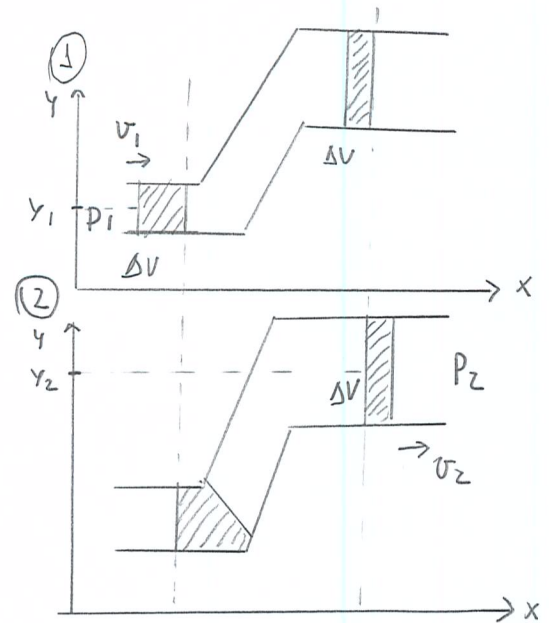
$$\Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho R \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{cte}$$

Os resultados acima mostram que onde o fluido sofre estrangulamento ele escoa mais rápido. As linhas de corrente ficam mais próximas entre si.

Equação de Bernoulli

Suponha que queremos agora encontrar o balanço de energia necessário para levar um elemento de volume ΔV do fluido da situação 1 para 2.

Para que este movimento seja realizado é necessário a presença de uma força, que traduzida em pressão (p_1) na extremidade inferior.



● Pelo teorema do trabalho-energia cinética:

$$W = \Delta K$$

$$\text{onde } \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

O trabalho realizado contra a força gravitacional é:

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1) = -\rho \Delta V g (y_2 - y_1)$$

● Em termos de pressão, o trabalho realizado por uma força F é:

$$W_p = F \cdot \Delta L = F \frac{\Delta V}{A} = p \Delta V$$

Assim, o trabalho total realizado por p_1 e contra p_2 é:

$$W_p = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

de forma que: $W_g + W_p = \Delta K$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \Delta V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \Delta V v_1^2 = -\rho \Delta V g y_2 + \rho \Delta V g y_1 + p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

$$\Rightarrow p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1$$

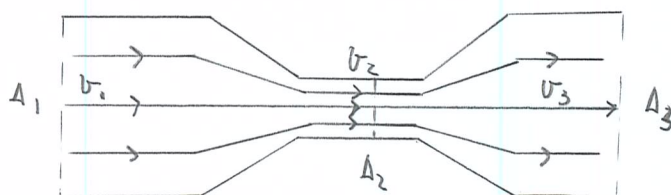
Que é a chamada eq. de Bernoulli:

$$\boxed{p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{cte}} \Rightarrow \text{se } v=0 \Rightarrow p_2 = p_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

Escoamento horizontal.

Neste caso $y_1 = y_2$

$$\Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

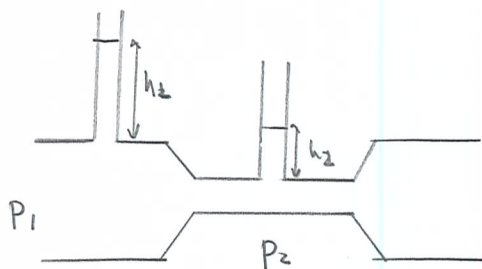


Como a vazão é cte: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

Na verdade este é o conceito do tubo de Venturi.

$$p_1 - p_2 = (p_0 + \rho g h_1) - (p_0 + \rho g h_2)$$

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2)$$



Sendo assim, se quisermos medir a velocidade v_1 , por exemplo:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2 - v_1^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\rho}{A_2^2} (A_1^2 - A_2^2) v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{A_1^2 - A_2^2}}$$

Assim, conhecendo a tubulação e medindo h_1 e h_2 podemos determinar as velocidades de escoamento.

TUBO DE PITOT

Outro instrumento para medir velocidade de um fluido é o chamado Tubo de Pitot. Se formos um objeto aerodinâmico podemos construir o seguinte aparato:

Em O $v_0 = 0 \Rightarrow$ sendo a dif. de altura desprezível:

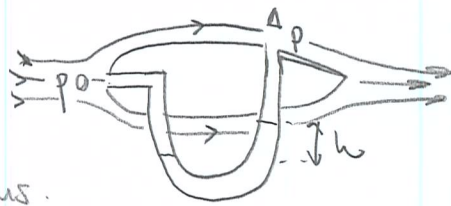
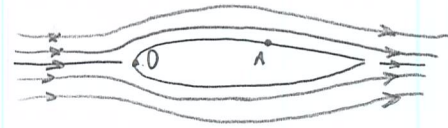
$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

onde v é a vel. de escoamento do fluido no ponto A.

$$p_0 = p + \rho g h$$

ρ_0 é a dens. do fluido

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh \frac{\rho_0}{\rho}} \quad \text{é usado para medir velocidade de aviões.}$$

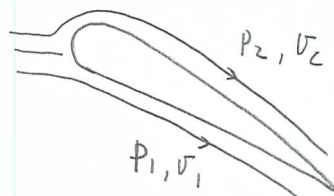


Este é o capítulo de sustentação aerodinâmica (asa dos aviões).

$$v_1 < v_2 \Rightarrow p_1 > p_2$$

$$p_1 - p_2 \approx \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = F_R A$$

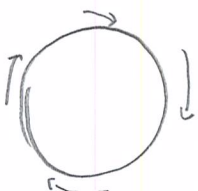
$$F_R \approx \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) A$$



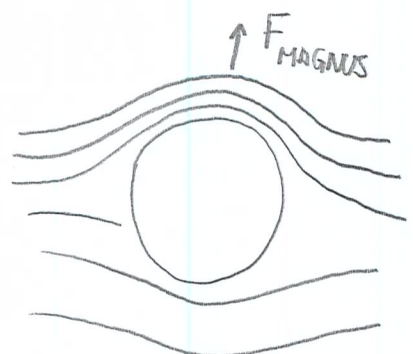
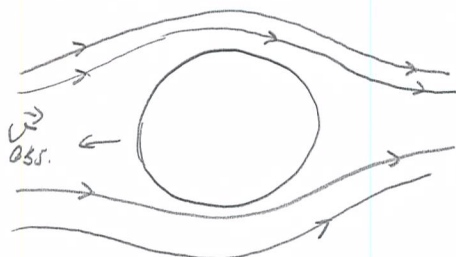
EFEITO MAGNUS

$\Rightarrow$ Efeito da rotação de um objeto movendo através de um fluido.

Girando "para trás" e em movimento

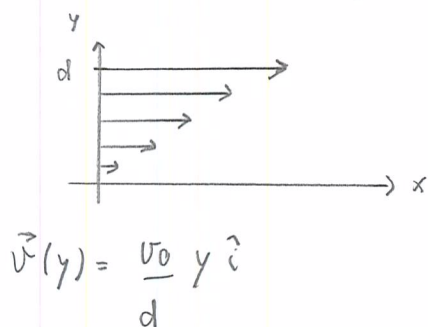


$\vec{v}_a$ rel. do fluido

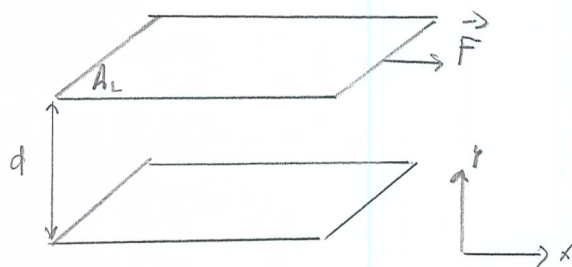


FLUIDO "REAL" - VISCOSIDADE

No caso de um fluido real, a experiência é imprescindível na compreensão dos efeitos. Para duas placas de área A , onde uma está sujeita a uma força $\vec{F}$ constante verifica-se experimentalmente



$$\vec{v}(y) = \frac{v_0}{d} y \hat{i}$$



• Onde v_0 é a velocidade da placa, que também é a do fluido.

⇒ fluido em contato com sólido permanece em repouso em relação ao sólido.

Dai tem-se a lei de Newton da viscosidade, de forma que a tensão é proporcional à taxa de variação espacial da velocidade.

$$\frac{F_v}{A_L} = \eta \frac{v_0}{d} = \eta \frac{dv}{dy}$$

$$[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = 10 \text{ poise}$$

A_L : área da seção longitudinal

η é o coeficiente de viscosidade (ou apenas viscosidade).

• Este fluxo é chamado laminar, pois acontece em "lâminas" paralelas do fluido.

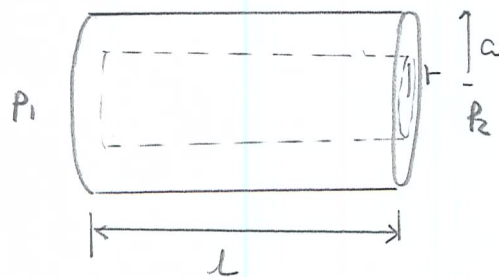
Este e/ou permite que descrevamos de forma mais realista o fluxo através de uma tubulação.

Seguindo o ensaio viscoso por um tubo de raio a :

Para um cilindro interno de raio r :

$$\frac{F_v}{A_L} = \frac{(p_1 - p_2) \pi r^2}{2\pi r l} = -\eta \frac{dv}{dr} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Sinal menos} \\ \Rightarrow v(a) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r dr$$

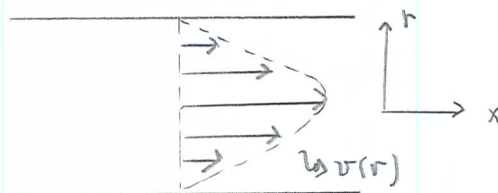


Integrando de $r \rightarrow a$

$$v(a) - v(r) = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (a^2 - r^2)$$

sendo $v(a) = 0$

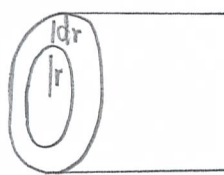
$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (a^2 - r^2)$$



Agora podemos calcular a vazão através do tubo:

Para um anelinho de raio r e $r+dr$

$$dR = v(r) dA = v(r) 2\pi r dr$$



$$dR = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \pi [a^2 r - r^3] dr$$

$$R = \int_0^a dR = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \pi \left[a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^a$$

$$\boxed{R = \frac{(p_1 - p_2) \pi a^4}{8\eta l}}$$

Lei de Hagen-Poiseuille (1840)

Isso significa que, para uma dada dif. de pressão, a vazão vai com a^4 .

⇒ Problema para manutenção do fluxo sanguíneo, por exemplo.