Notas de aula
Física Geral 2 - F 228

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

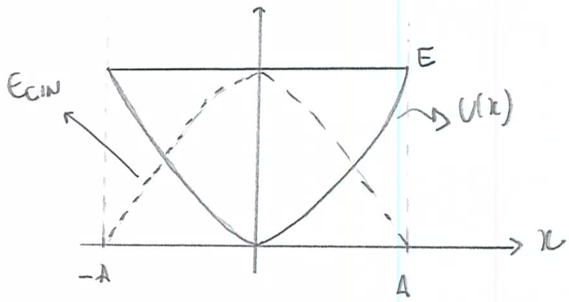
http://sites.ifi.unicamp.br/odilon

AULA 5 OSCILAÇÕES

Oscilação: variação periódica de uma grandeza em torno de um valor
Onda: variação temporal e espacial de uma grandeza
↳ velocidade de propagação

OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES.

Este problema já foi resolvido em F-128. Na ausência de dissipação, a energia mecânica do sistema se conserva



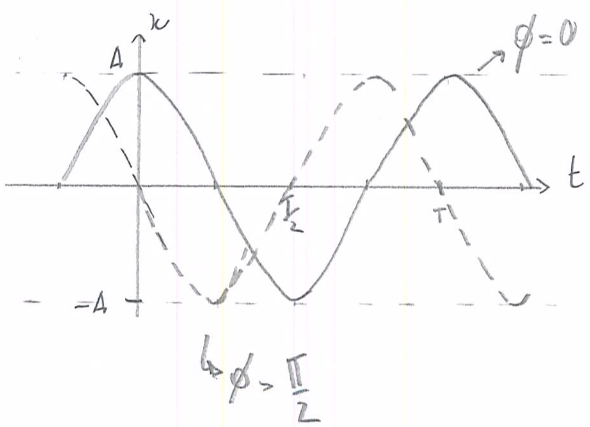
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E = \frac{1}{2}KA^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{K}{m}}\,dt = \omega\,dt$$

$$\Rightarrow x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ou ainda: } x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

que é uma função periódica $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ ϕ é a fase do movimento.



A partir de $x(t)$ podemos determinar:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x(t) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -Kx$$

↳ 2ª lei de Newton

↳ freq. característica do sistema

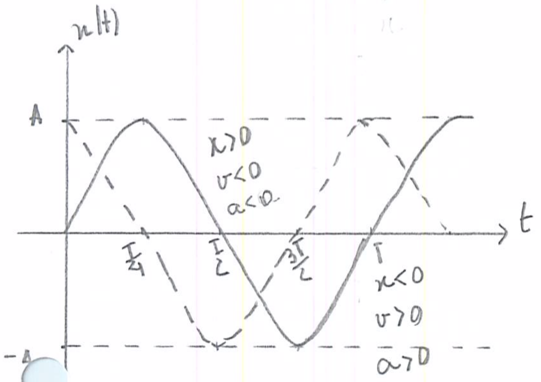
Destas eq. vemos que $v(t)$ e $a(t)$ também tem comportamento oscilatório, com

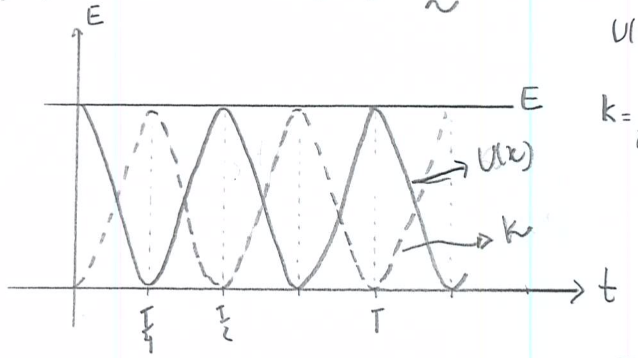
$$v_{MAX} = \omega A \quad e \quad a_{MAX} = \omega^2 A$$

COMO DETERMINAR A e ϕ

$\Rightarrow$ CONDIÇÕES INICIAIS

Podemos ver estes comportamentos pelo gráfico de $x(t)$. Seja $\phi = -\frac{\pi}{2}$





$U(x) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

$K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

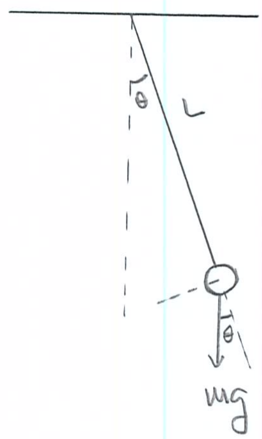
$\phi = 0$

↳ O periodo de oscilação U e K $T_U = T_K = \frac{T}{2}$ porque $K \propto v^2$ e $U \propto x^2$

PÊNDULO SIMPLES

Para outros sistemas que também oscilam, a 2ª lei de Newton permanecerá igual. A freq. característica, no entanto, vai depender do sistema.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\tau = -rF\sin\theta = -Lmg\sin\theta$$

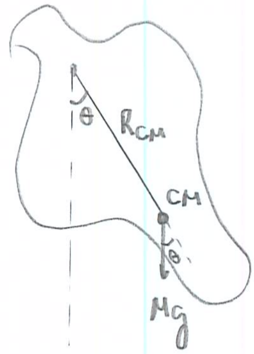
Para pequenas oscilações: $\sin\theta \approx \theta$

$$-Lmg\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad I = mL^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Lmg}{mL^2}\theta = -\frac{g}{L}\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \text{freq. caract.}$$

Solução: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

PÊNDULO FÍSICO



O mesmo raciocínio vale para pêndulos mais gerais:

$$\tau = -MgR_{CM}\,\mathrm{sen}\,\theta \approx -MgR_{CM}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

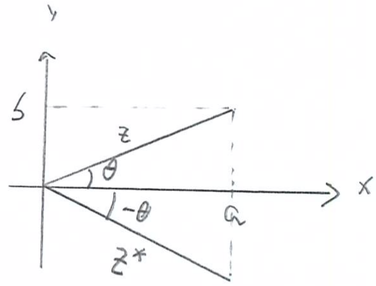
$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgR_{CM}}{I}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgR_{CM}}{I}}$$

e $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

———— " ————

NÚMEROS COMPLEXOS

Seja $z = a + i b$ $\Rightarrow$ No plano complexo
$i = \sqrt{-1}$



$$|z|^2 = a^2 + b^2$$
$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow z = |z|e^{i\theta}$$

$$z^* = a - ib$$

Se $f(t)$ é de forma que $f(0) = 1$ e $\frac{df}{dt} = \lambda f(t)$ $\Rightarrow f(t) = ce^{\lambda t}$

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\mathrm{sen}\,t \quad \frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\,t) = \cos t \Rightarrow \frac{d}{dt}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) = -\mathrm{sen}\,t + i\cos t = i(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$\Rightarrow e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t \quad \text{ou ainda: } e^{i(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + i\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

com $\cos[\omega t + \phi] = \mathrm{Re}[e^{i(\omega t + \phi)}]$

OHS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \qquad \text{Seja } z(t) = x(t) + iy(t) = Ce^{pt}$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2z}{dt^2} + Kz = 0 \quad \Rightarrow mCp^2e^{pt} + KCe^{pt} = 0 \quad \Rightarrow Ce^{pt}(mp^2 + K) = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{K}{m} = 0 \qquad p^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow p = \pm i\omega$$

Vamos adotar a de sinal positivo: $z(t) = Ce^{i\omega t}$

Mas $C = Ae^{i\varphi}$ $\Rightarrow z(t) = Ae^{i[\omega t + \varphi]}$ $\Rightarrow \underline{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

"

OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Neste caso, a força dissipativa é proporcional a velocidade $F_D = -bv = -b\frac{dx}{dt}$

2ª lei: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ é chamada freq. natural

$\gamma = \frac{b}{m}$

Seja $z(t) = Ce^{pt}$

$$Cp^2e^{pt} + \gamma pCe^{pt} + \omega_0^2Ce^{pt} = 0 \quad \Rightarrow p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$$

cuja solução é:

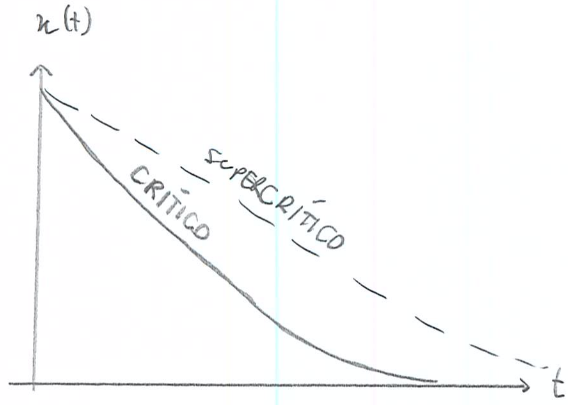
$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

De novo, podemos pegar apenas uma das soluções sem perda de generalidade.

CASO CRÍTICO $\quad \omega_0 = \frac{\gamma}{2}$

Neste caso. $p = -\frac{\gamma}{2} \Rightarrow z(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$\Rightarrow x(t) = z(t) = \boxed{Ce^{-\frac{\gamma t}{2}}}$$



CASO SUPERCRÍTICO $\quad \frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$$\Rightarrow p = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \qquad \text{Mas} \quad 0 < \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} < \frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = Ce^{\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\;}\right)t}$$

→ Mas decai a uma taxa menor do que a do caso crítico.

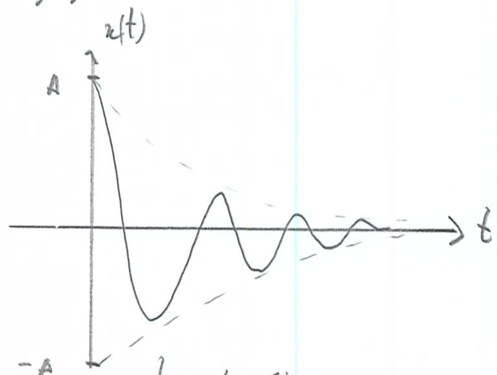
CASO SUBCRÍTICO $\quad \frac{\gamma}{2} < \omega_0$

$$\Rightarrow p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

→ FREQ. DE OSC. SE MODIFICA

$$\Rightarrow z(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega t} = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}[z(t)] = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$



Existem vários sistemas físicos que se comportam desta maneira.

→ Relaxação de spin em um sistema de 2 níveis
→ Decoerência de spin
→ Aprisionamento atômico, fotônico
→ Processos de termalização em um reservatório

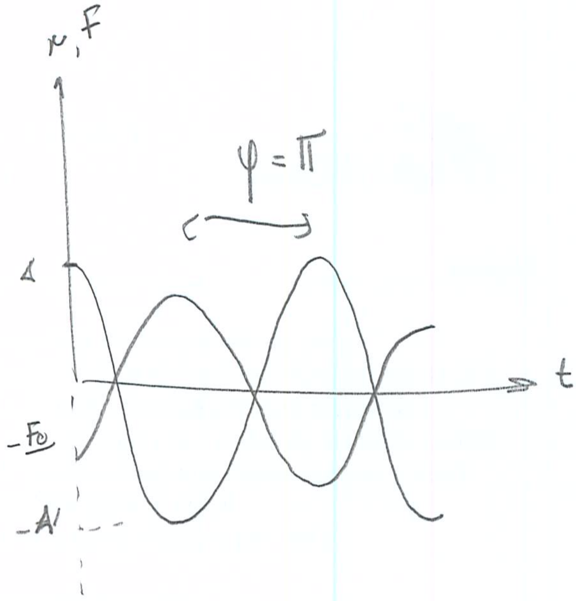
→ NESTE SISTEMA NÃO HÁ CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Para o OHS

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$F(x) = -kx = -kA\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -F_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



Oscilador HARMÔNICO FORÇADO

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \frac{F_0}{m}\cos\omega t = 0$$

Solução estacionária: $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

$z(t) = Ce^{i\omega t}$

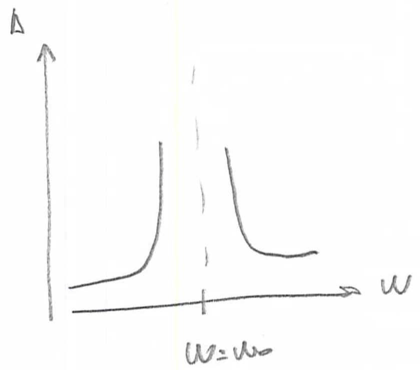
$$-C\omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 C e^{i\omega t} - \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ Mas $\omega > \omega_0$ ou $\omega_0 > \omega$

$$\Rightarrow C = Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ onde $A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$

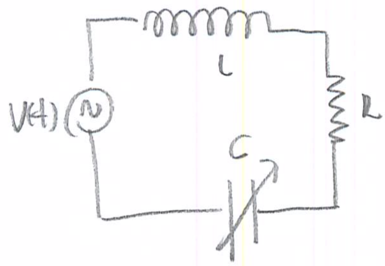
$$\begin{cases} \varphi = 0 \Rightarrow \omega < \omega_0 \\ \varphi = \pi \Rightarrow \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Problema: $\omega \to \omega_0 \Rightarrow A(\omega) \to \infty$



$\Rightarrow$ RESSONÂNCIA

EXEMPLO: CIRCUITO RLC



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\Rightarrow V(t)$: estímulo (sinal do rádio, por exemplo)

C variável: sintonização da freq. de ressonância

R: elemento dissipativo $\Rightarrow \gamma$

OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO AMORTECIDO

Suponha que agora haja um estímulo externo com freq. ω:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - Kx + F_0\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Estamos procurando por uma solução estacionária $t \gg \tau = \frac{1}{\gamma}$

Em, seja $z = Ce^{i\omega t} = x(t) + iy(t)$

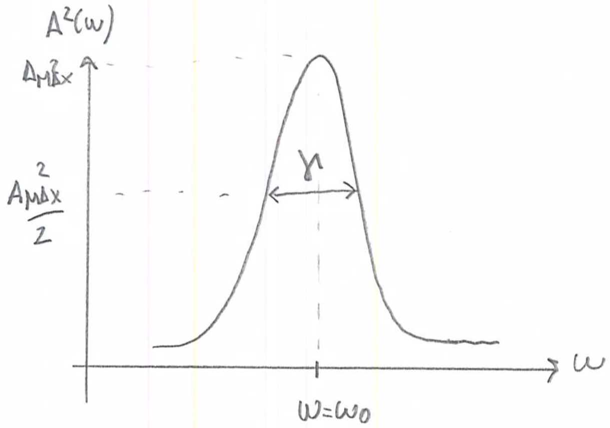
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 Ce^{i\omega t} + i\gamma\omega Ce^{i\omega t} + \omega_0^2 Ce^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} = Ae^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow A^2(\omega) = \frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \qquad \varphi(\omega) = -tg^{-1}\left[\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$$

Que, para amortecimento fraco: $\gamma \ll \omega_0$

$$\Rightarrow A^2(\omega) = \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]} \qquad \varphi(\omega) = -tg^{-1}\left[\frac{\gamma}{2(\omega_0-\omega)}\right]$$



$\Rightarrow \gamma$ dá a largura a meia altura

$\Rightarrow$ Qto menor γ, maior $A(\omega)$
$\gamma \to 0 \Rightarrow A(\omega) \to \infty$ } ressonância $\omega = \omega_0$

Aplicações:

EXEMPLO DO BALANÇO