Notas de aula

Física Geral 2 - F 228

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

http://sites.ifi.unicamp.br/odilon

DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

⇒ Noções de mecânica estatística.

Como vimos anteriormente, a temperatura está associada à energia cinética média das partículas:

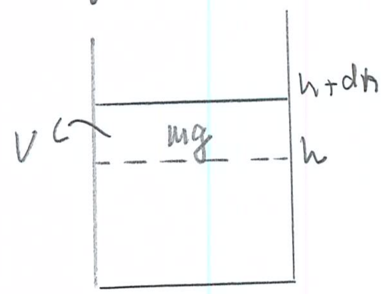
$$\langle K \rangle = \frac{f}{2} KT = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{fKT}{m}}$$

Isto mostra que temos uma distribuição de velocidades.
- Como é esta distribuição?

Definido o valor de T ⇒ EQUILÍBRIO TÉRMICO

Vamos considerar o caso de uma coluna de gás em equilíbrio térmico.

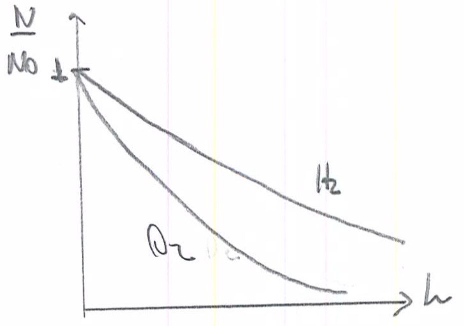


A diferença de pressão na camada é dada por:

$$dP = P_{h+dh} - P_h = \frac{F}{A} = -N \frac{mg}{A} \frac{dh}{dh} = -\frac{N}{V} mg\, dh$$

Para um gás ideal: $dP\,V = dN\,KT$

$$\Rightarrow dN\,KT = -N mg\, dh \Rightarrow \frac{dN}{dh} = -\frac{mg}{KT} N \Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-\frac{mg}{KT} h}}$$ ⊛



Mas mgh = energia potencial ⊛

↳ O que isto significa?

⊛ Na verdade esta é uma eq. geral onde mgh pode ser subst. por um pot. arbitrário $V(r)$.

Para uma determinada altura h, vão existir partículas, tal que

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Em outras palavras, a uma altura h apenas teremos partículas cuja energia cinética é suficiente para levá-las até ali. Sendo assim, nossa exponencial pode ser escrita da forma:

Para uma dada velocidade v: $\quad N(v'>v) = N(v'>0)\, e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$

Sendo assim, a probabilidade de encontrarmos uma partícula c/ vel. > v é:

$$P(v'>v) \propto \frac{N(v'>v)}{N(v'>0)} = e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}} \qquad P(v'>0) = 1$$

$$P(v'>\infty) = 0$$

A probabilidade de estar entre v e $v+dv$ é:

$P(v)\,dv = C\, e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}}\, dv \quad$ onde C é uma constante de normalização.

Fazendo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(v)\,dv = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} \quad \Rightarrow P(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}}$

Este é um problema unidimensional, de forma que em 3D temos:

$$P^{3D}(v)\,dv = P(v_x)\,dv_x\, P(v_y)\,dv_y\, P(v_z)\,dv_z = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{KT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\,dv_y\,dv_z$$

No espaço 3D, o módulo da velocidade é: $dv_x\,dv_y\,dv_z = 4\pi v^2\,dv$

$$\Rightarrow P^{3D}(v)\,dv = 4\pi\left[\frac{m}{2\pi KT}\right]^{\frac{3}{2}} v^2\, e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}}\, dv$$

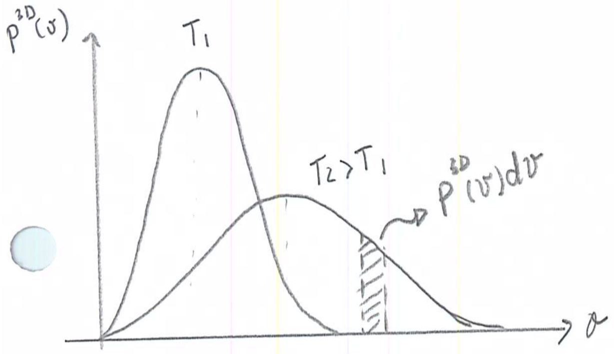
$\Rightarrow$ Dist. MAXWELL BOLTZMANN

onde, naturalmente, aplica-se a normalização:

$$\int_0^\infty P^{3D}(v)\,dv = 1$$

E para um intervalo $[v_1, v_2]$ $\Rightarrow$ $P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} P^{3D}(v)\,dv$

A forma desta função é a seguinte:



$v \to 0 \Rightarrow P^{3D} \to 0$

$v \to \infty \Rightarrow P^{3D} \to 0$

Algumas propriedades desta função:

MÁXIMO: $\dfrac{dP^{3D}}{dv} = 0 \Rightarrow 2v\, e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}} - v^2\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{m}{KT}2v\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{KT}} = 0$

$1 - v^2\dfrac{m}{2KT} = 0 \Rightarrow v_{MAX} = \sqrt{\dfrac{2KT}{m}}$

VELOCIDADE MÉDIA: $\bar{v} = \int_0^\infty v\,P^{3D}(v)\,dv \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\dfrac{8KT}{\pi m}}$

VELOCIDADE QUADRÁTICA MÉDIA:

$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 P^{3D}(v)\,dv = \dfrac{3KT}{m}$ $\Rightarrow$ como tínhamos obtido anteriormente:

Assim: $v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} > \bar{v} > v_{MÁX}$

Dentre os fenômenos explicados por $P^{3D}(v)$ está a evaporação!

CAMINHO LIVRE MÉDIO

Para uma partícula num gás à temperatura T pode-se mostrar que:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 (N/V)} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi d^2 P}$$

onde d é o diâmetro da molécula.

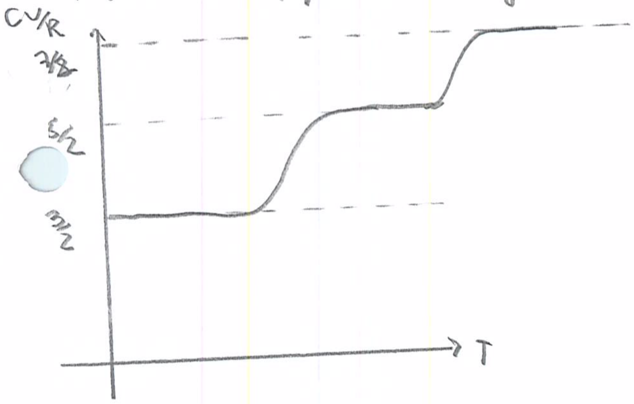
⇒ MOSTRAR TABELA.

EFEITOS QUÂNTICOS

Vimos que, pela teoria "clássica" dos gases ideais:

$$E_{int} = \frac{f}{2} nRT \quad e \quad C_V = \frac{f R}{2} = cte$$ ⇒ C_V não deveria depender da temperatura.

No entanto, para um gás diatômico, por exemplo, observamos que:

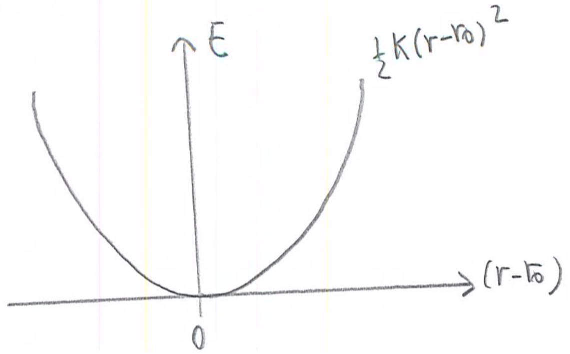


Como explicar este resultado?

↳ Efeitos quânticos

↳ "congelamento" dos graus de liberdade

Classicamente, o potencial de uma molécula pode ser aprox. por uma parábola → LENNARD-JONES $(r - r_0) \approx 0$



→ Energia é contínua.

Quando o tamanho é diminuto, no entanto, temos que usar Física Quântica, que prevê níveis quantizados. ⊛

Seja E_0 e E_1 as energias dos 2 estados de mais baixa energia.

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega = hf \qquad h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ Js$$

Similar ao caso clássico, a probabilidade de encontrar a molécula nos estados é:

$$P_1 \propto e^{-E_1/KT} \quad e \quad P_0 \propto e^{-\frac{E_0}{KT}}$$

Mas $P_1 = \frac{N_1}{N}$ e $P_0 = \frac{N_0}{N}$ $\Rightarrow \frac{N_1}{N_0} = \frac{P_1}{P_0} = e^{-\frac{(E_1 - E_0)}{KT}}$

Sendo assim, o valor de KT é fundamental para determinar a ocupação relativa entre os dois níveis.

Para baixas temperaturas: $KT \ll E_1 - E_0 \Rightarrow \frac{N_1}{N_0} \approx 0$ → Estado congelado.

⇒ Só o estado fundamental é ocupado.

Quando T aumenta a população N_1 passa a ficar relevante

⇒ Estado superior é "ativado".

No caso do gás → $T \Rightarrow 0$ ⇒ só translação

→ A partir de um certo valor ⇒ rotação

⊛ Além disso há uma energia mínima (de ponto zero) para o osc. harmônico.

No caso da mol. diatômica $\frac{7}{2}$ vem de $\frac{1}{2}KT$ da vibração e $\frac{1}{2}KT$ da energia cinética
↓
potencial