Notas de aula
Física Geral 4 – F 428

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

http://sites.ifi.unicamp.br/odilon

F428 - AULA 01 - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Temos a formulação para as eq. de Maxwell na forma integral:

1) $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ → lei de Gauss

$\phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

2) $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

3) $\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$ → INDUÇÃO de Faraday

$\phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$

4) $\oint_\ell \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ → Ampere Maxwell.

$i = \oint_A \hat{j} \cdot d\vec{A}$ $\hat{j}$ → densidade de corrente

Vamos aplicar o teorema do divergente na eq. 1.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

ρ: densidade de carga

O mesmo vale para 2:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Para as outras duas, usamos o teorema de Stokes.

$$\oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) = \oint_A \left(-\frac{\partial \vec{B}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Analogamente:

$$\oint_{\ell} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_A (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j}\cdot d\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_A \vec{E}\cdot dA\right)$$

$$= \oint_A (\mu_0 \vec{j})\cdot d\vec{A} + \oint_A \left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Agora vamos mostrar que uma solução ondulatória satisfaz as eq. de Maxwell.

Usemos: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

$\Rightarrow$ EQUAÇÃO ANÁLOGA PODE SER OBTIDA PARA $\vec{B}$. (Fazer para casa!).

No vácuo: $\vec{j} = 0$ e $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \text{eq. de onda.}$$

Seja $\vec{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j}$ $\Rightarrow$ onda plana

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 k^2 e^{i(kx-\omega t)} \hat{j}$$

$$-\cancel{E_0} \omega^2 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cancel{E_0} k^2 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = v^2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Se usarmos os valores destas duas constantes:

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A $\qquad \varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2

$$\Rightarrow \boxed{v \cong 3 \times 10^8 \, m/s = c}$$ $\Rightarrow$ velocidade da luz

Sendo assim: $\underline{\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t) \hat{j}}$ é solução da eq. e a velocidade de propagação da onda é c.

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad v = \lambda f = c \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad v = \frac{\omega}{k}$ $\Rightarrow$ características de uma onda.

Agora vamos ver como é o campo magnético $\vec{B}$.

Seja $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t) \hat{j} = E_y \hat{j}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \cancel{-\frac{\partial E_y}{\partial z}}^{\,0} \hat{i} + 0 + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow \vec{B} = B_z \hat{k}$

$\Rightarrow$ Como $\vec{B}$ obedece à mesma equação de onda que $\vec{E}$, podemos escrever:

$$\underline{\vec{B} = B_z \hat{k} = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\, \hat{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} \perp \vec{B}}$$

Antes de visualizarmos o que acontece, há mais uma relação importante.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}}^{\,0}\, \hat{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\, \hat{j} + 0$$

No vácuo $\vec{j} = 0$ $\Rightarrow$ $-\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{j} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\hat{j}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = k B_0 \cos(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$\Rightarrow -k B_0 = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0$ mas $c = \frac{\omega}{k}$ e $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{c} \cdot c^2 = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = c B_0}$$

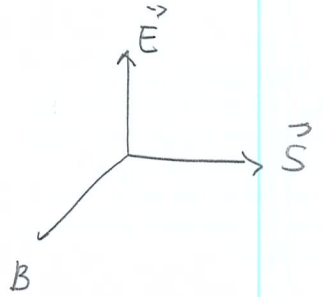
- Sendo assim, uma onda eletromagnética é composta por duas componentes perpendiculares, uma associada à $\vec{E}$ e outra à $\vec{B}$.
- As componente estão em fase e são mutuamente induzidas, como pode ser visto nas eq. de Maxwell.
- A relação entre as amplitudes é $E_0 = c B_0$.
- A onda se propaga com a velocidade da luz c.

- MOSTRAR SLIDE COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO
- Mostrar arco íris de Maxwell
- Falar sobre cargas aceleradas

VETOR DE POYNTING

Seja $S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{A}{\cancel{T}m} \cdot \frac{V}{m} \cdot \cancel{T} = \frac{\cancel{C}}{s} \cdot \frac{J}{\cancel{C}} \frac{1}{m^2} = \frac{J/s}{m^2} = \frac{W}{m^2}$ ⇒ Intensidade.

Vetor de Poynting. $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$



$\vec{S}$ indica a direção e sentido do fluxo de energia de uma onda eletromagnética.

Também pode ser escrito:

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \operatorname{sen}^2(kx - \omega t) \Rightarrow \boxed{\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c}}$$

$E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$

A energia da onda é dividida entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = u_B$$

Usando o vetor de Poynting podemos ver como o sinal de um detector D cai com a distância à fonte.

Seja P_f a potência de saída de uma determinada fonte.

Se a fonte é pontiforme e a radiação distribuída isotropicamente, a intensidade medida por um detector D é:

$$I_D = \frac{P_f}{4\pi r^2}$$ ⇒ r é a distância entre fonte e detector.

$$\Rightarrow \frac{P_f}{4\pi r^2} = \frac{E_{rms}^{D\,2}}{\mu_0 c} \Rightarrow E_{rms}^{D} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu_0 c}{4\pi} P_f}$$ ⇒ aumenta com $\sqrt{P_f}$

diminui com $\frac{1}{r}$

Tópico não discutido nesta aula: PRESSÃO DE RADIAÇÃO

⇒ Trabalhar este assunto na aula exploratória.