Notas de aula

Física Geral 4 - F 428

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

http://sites.ifi.unicamp.br/odilon

F428 - AULA 01 - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Temos a formulação para as eq. de Maxwell na forma integral:

① $\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ → lei de Gauss

$\phi_B = \oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$

② $\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$

③ $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$ → INDUÇÃO de Faraday

$\phi_E = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}$

④ $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ → Ampere Maxwell.

$i = \oint_A \hat{j}\cdot d\vec{A}$ $\quad \hat{j}$ → densidade de corrente

Vamos aplicar o teorema do divergente na eq. ①.

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho\, dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

ρ: densidade de carga

O mesmo vale para ②:

$$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\, dV = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

Para as outras duas, usamos o teorema de Stokes.

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_A (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A}\right) = \oint_A \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Analogamente:

$$\oint_{\ell} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_A (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \mu_0 \oint_A \hat{j}\cdot d\vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A}\right)$$

$$= \oint_A (\mu_0 \vec{j})\cdot d\vec{A} + \oint_A \left(\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \hat{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Agora vamos mostrar que uma solução ondulatória satisfaz as eq. de Maxwell.

Usamos: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)$$

$\Rightarrow$ EQUAÇÃO ANÁLOGA PODE SER OBTIDA PARA $\vec{B}$. (Fazer para casa!).

No vácuo: $\vec{j} = 0$ e $\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\nabla^2\vec{E} = 0$$

$\Rightarrow$ eq. de onda.

Seja $\vec{E} = E_0 e^{i(Kx-wt)} \hat{j}$ → onda plana

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -E_0 w^2 e^{i(Kx-wt)} \hat{j}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 K^2 e^{i(Kx-wt)} \hat{j}$$

$$-E_0 w^2 \cancel{e^{i(Kx-wt)}} + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} E_0 K^2 \cancel{e^{i(Kx-wt)}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w^2}{K^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = v^2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Se usarmos os valores destas duas constantes:

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A $\qquad \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2

$$\Rightarrow \boxed{v \cong 3 \times 10^8 m/s = C} \rightarrow \text{velocidade da luz}$$

Sendo assim: $\vec{E} = E_0 \sin(Kx - wt) \hat{j}$ é solução da eq. e a velocidade de propagação da onda é C.

$$\Rightarrow w = \frac{2\pi}{T} \qquad v = \lambda f = C \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad v = \frac{w}{k}$$ → característica de uma onda.

Agora vamos ver como é o campo magnético $\vec{B}$.

Seja $\vec{E} = E_0 \sin(kx - wt) \hat{j} = E_Y \hat{j}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_Y & 0 \end{vmatrix} = \cancel{-\frac{\partial E_Y}{\partial z}}^{\,0} \hat{i} + 0 + \frac{\partial E_Y}{\partial x} \hat{k} \Rightarrow \frac{\partial E_Y}{\partial x} \hat{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow \vec{B} = B_z \hat{k}$

$\Rightarrow$ Como $\vec{B}$ obedece à mesma equação de onda que $\vec{E}$, podemos escrever:

$$\underline{\vec{B} = B_z \hat{k} = B_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)\, \hat{k}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \vec{B}}$$

Antes de visualizarmos o que acontece, há mais uma relação importante.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \cancelto{0}{\frac{\partial B_z}{\partial y}}\, \hat{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\, \hat{j} + 0$$

No vácuo $\vec{j} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial B_z}{\partial x}\, \hat{j} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\, \hat{j}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = k B_0 \cos(kx - \omega t) \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$\Rightarrow -k B_0 = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_0$ mas $c = \frac{\omega}{k}$ e $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{1}{c} \cdot c^2 = c \Rightarrow \boxed{E_0 = c B_0}$$

- Sendo assim, uma onda eletromagnética é composta por duas componentes perpendiculares, uma associada à $\vec{E}$ e outra à $\vec{B}$.
- As componentes estão em fase e são mutuamente induzidas, como pode ser visto nas eq. de Maxwell.
- A relação entre as amplitudes é $E_0 = c B_0$.
- A onda se propaga com a velocidade da luz c.

Seja P_f a potência de saída de uma determinada fonte.

Se a fonte é puntiforme e a radiação distribuída isotropicamente, a intensidade medida por um detector D é:

$$I_D = \frac{P_f}{4\pi r^2}$$ $\Rightarrow$ r é a distância entre fonte e detetor.

$$\Rightarrow \frac{P_f}{4\pi r^2} = \frac{{E^D_{rms}}^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E^D_{rms} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu_0 c}{4\pi} P_f}$$ $\Rightarrow$ aumenta com $\sqrt{P_f}$

diminui com $\frac{1}{r}$

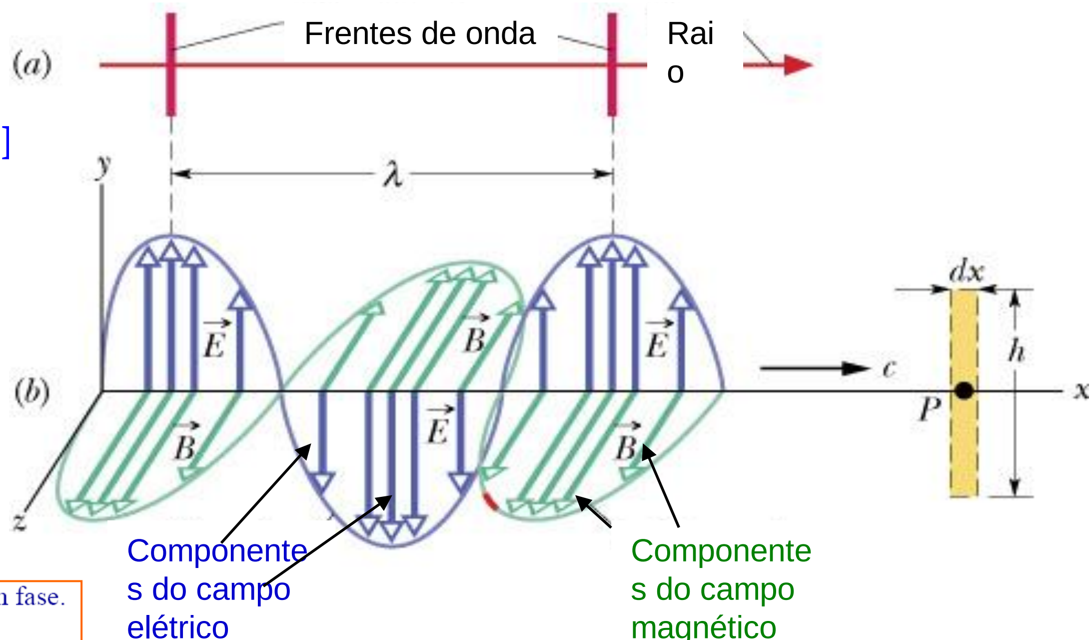
~ —

Tópico não discutido nesta aula: PRESSÃO DE RADIAÇÃO

$\Rightarrow$ Trabalhar este assunto na aula exploratória.

$$E_y(x,t) = E_0 \sin k(x - ct) = E_0 \sin(kx - \omega t); \quad \omega = ck$$

Os ca

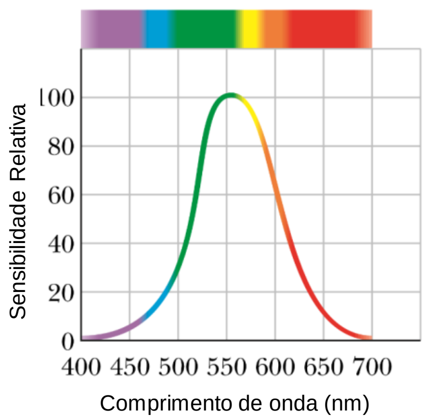


- $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ propagam-se em fase.

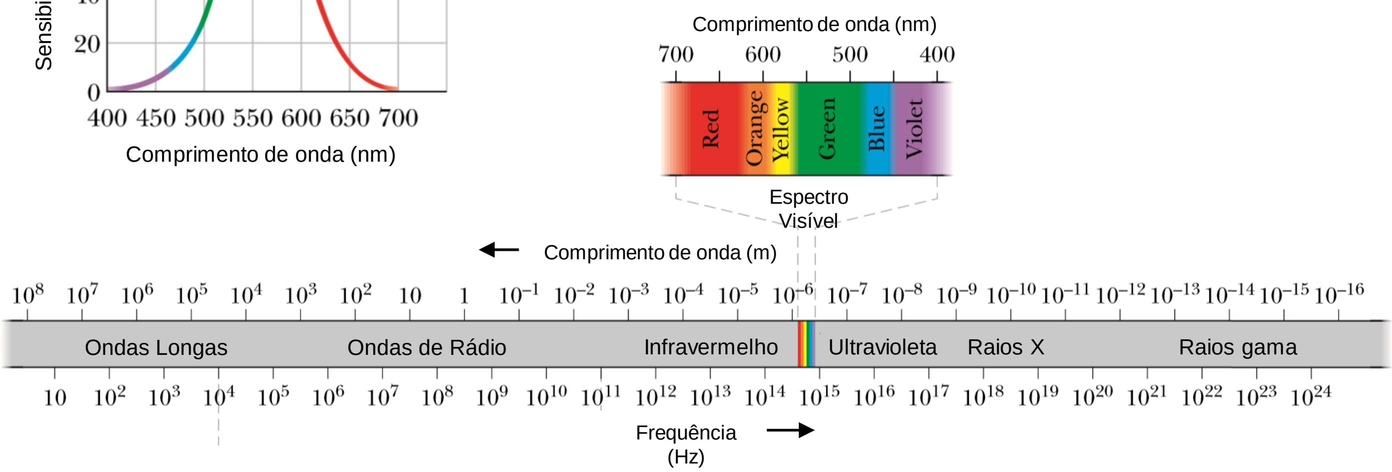
- $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são mutuamente perpendiculares.

- $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ aponta na direção de propagação

Ondas Eletromagnéticas

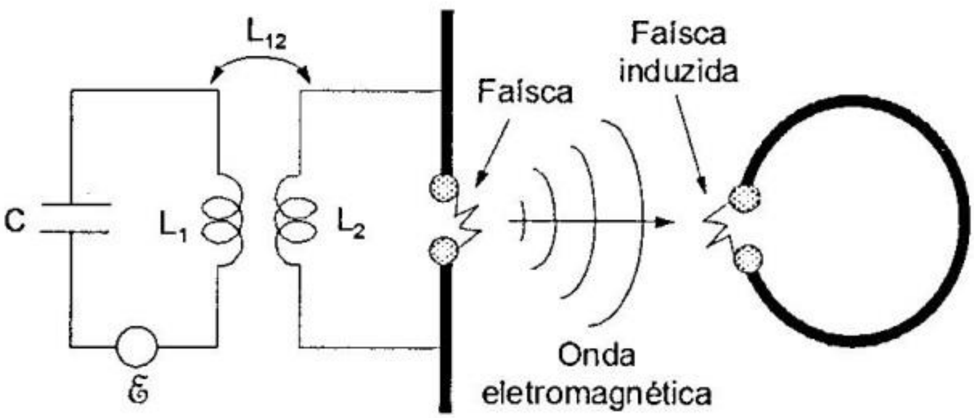


Sensibilidade do Olho Humano



O experimento de Hertz

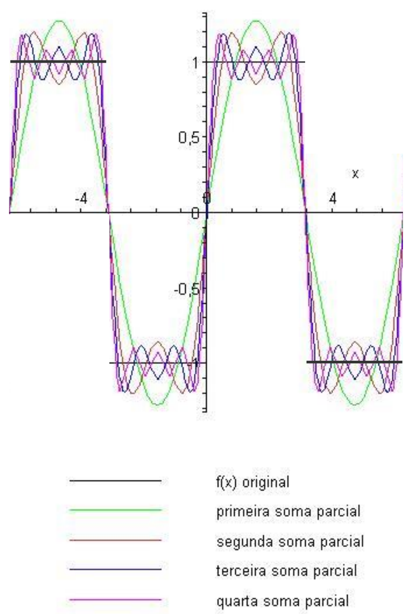
(1885-1889)



(Descoberta das ondas de rádio em 1887)

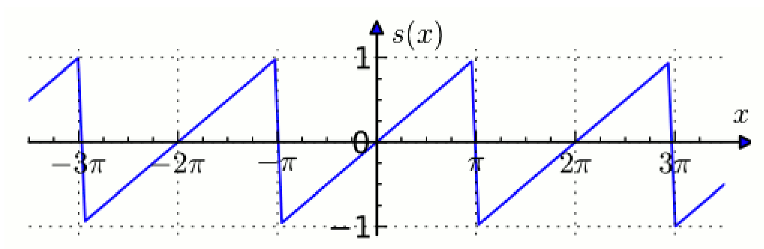
• Em geral, qualquer função **periódica** pode ser escrita como uma série (soma) possivelmente infinita de funções seno e cosseno: uma série de Fourier:

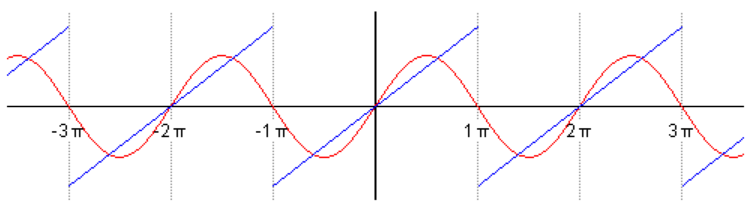
Ex.: *Onda quadrada*



$$\sigma_4 = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \frac{4}{7\pi}\sin 7x$$

Outro exemplo:





Veja a animação aqui:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Onda_dente_de_serra#/media/File:Synthesis_sawtooth.gif

- **Por essa razão...**
- Já que as equações de onda são lineares nos campos (implicando que somas de soluções são solução),
- E qualquer função periódica pode ser escrita como uma soma de funções senos e cossenos,
- Então podemos simplificar e estudar apenas as soluções senoidais..