Notas de aula
Física Geral 4 – F 428

Odilon D. D. Couto Jr.

Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Departamento de Física da Matéria Condensada

http://sites.ifi.unicamp.br/odilon

AULA 04 - DIFRAÇÃO

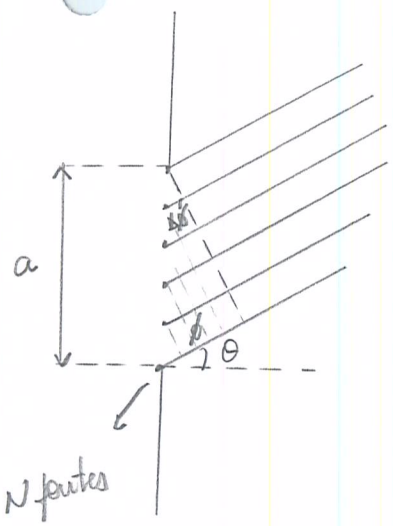
Do ponto de vista físico, interferência e difração são o mesmo fenômeno.

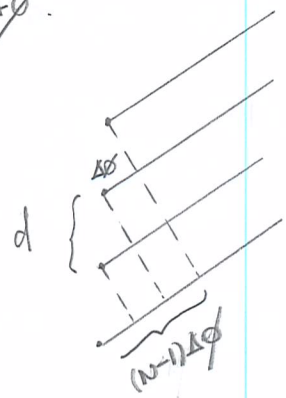
Usualmente: 2 fontes → INTERFERÊNCIA

N fontes → DIFRAÇÃO

Sendo assim, para resolver o problema de uma fenda de abertura "a" na frente de um anteparo, consideramos N fontes pontuais com defasagem constante $\Delta\phi$ e fase total $\phi = N\Delta\phi$.

MOSTRAR SLIDE OU EXPERIMENTO





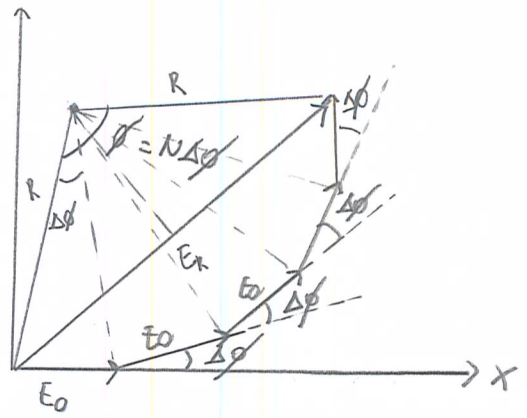
Se o campo gerado por uma fonte é dado por

$$\vec{E}_1 = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

E o anteparo está em $x = 0$. Explicitamente:

$$E_R = E_1 + E_2 + \dots E_N = E_0\left[\operatorname{sen}(-\omega t) + \operatorname{sen}(-\omega t + \Delta\phi) + \dots + \operatorname{sen}(-\omega t + (N-1)\Delta\phi)\right]$$

Que pode ser resolvida usando fasores:



$$\operatorname{sen}\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{E_0}{2R} \Rightarrow R = \frac{E_0}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right) = \frac{E_R}{2R}$$

$$\Rightarrow E_R = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)$$

$N \to \infty$

$N\Delta\theta = (N-1)\Delta\phi$

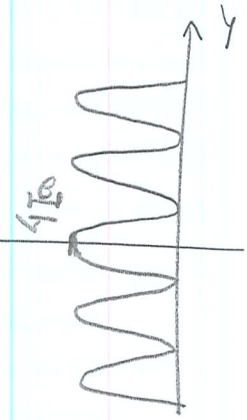
os dois $\Delta\phi$ s são diferentes. ⇒ Formular o problema.

$$E_R = E_0 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{I(\Delta\phi) = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}} \quad (6)$$

Intensidade para N fontes.

Se $N=2 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right) = \operatorname{sen}\Delta\phi = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

$$\Rightarrow I = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \Rightarrow \text{Fenda de Young}$$



$\Rightarrow$ DIFRAÇÃO $\equiv$ INTERFERÊNCIA

Vamos analisar a expressão (6).

1) No ponto central do anteparo: $\Delta\phi \to 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right) \approx \frac{N\Delta\phi}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \approx \frac{\Delta\phi}{2}$

$$I(\Delta\phi=0) = I_0 \frac{N^2\Delta\phi^2/4}{\Delta\phi^2/4} = N^2 I_0 \Rightarrow \text{Intensidade do máximo central.}$$

2) 1º mínimo ocorre quando $\operatorname{sen}\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{N\Delta\phi}{2} = \pi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$

Mas: $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} d\operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N d\operatorname{sen}\theta = \lambda$ Mas $Nd = a$

$$\Rightarrow \boxed{a\operatorname{sen}\theta = \lambda} \Rightarrow 1^{\text{o}} \text{ mínimo.}$$

3) 2º mínimo: $\frac{N\Delta\phi}{2} = 2\pi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{4\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} d\operatorname{sen}\theta$

$$\Rightarrow N d\operatorname{sen}\theta = 2\lambda \Rightarrow \boxed{a\operatorname{sen}\theta = 2\lambda} \Rightarrow 2^{\text{o}} \text{ mínimo.}$$

4) Para o m-ésimo mínimo: $\boxed{a \operatorname{sen}\theta = m\lambda}$

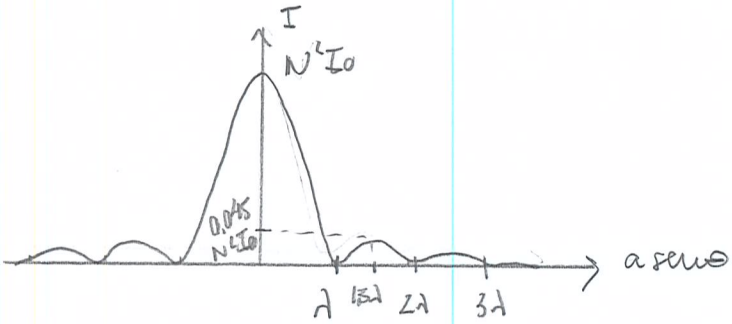
5) O 2º máximo acontece quando

$$\frac{N\Delta\phi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta = \frac{3\pi}{N}$$

$$\Rightarrow N d \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2}\lambda \Rightarrow \text{entre } 1^{\circ} \text{ e } 2^{\circ} \text{ mínimos.}$$

Além disso, para $\frac{N\Delta\phi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow I = I_0 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2N}\right)} \simeq \frac{4N^2 I_0}{9\pi^2} = \frac{4}{9\pi^2}(N^2 I_0) = 0{,}045\, I \text{ (máximo central)}$$



Voltemos à expressão (1) se $N \to \infty \Rightarrow \Delta\phi \to 0$ lembrando que $\phi = N\Delta\phi$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2N}\right) \simeq \frac{\phi}{2N}$$

$$\Rightarrow I = \frac{I_0 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2N}\right)^2} = N^2 I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2}\right)^2} = \boxed{I_{max}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2} \Rightarrow \text{Halliday}$$

onde $\alpha = \frac{\phi}{2}$ e $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$

Além disso vemos que $\sin\theta = \frac{m\lambda}{a}$

Se $m = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$ $\Rightarrow a \gtrless \lambda \Rightarrow$ muda-se a posição do mínimo.

$\Rightarrow$ que também depende de λ.

$\Rightarrow$ SLIDE 7.

$\Rightarrow$ SLIDES 8 e 9 $\Rightarrow$ PONTO CLARO DE FRESNEL.

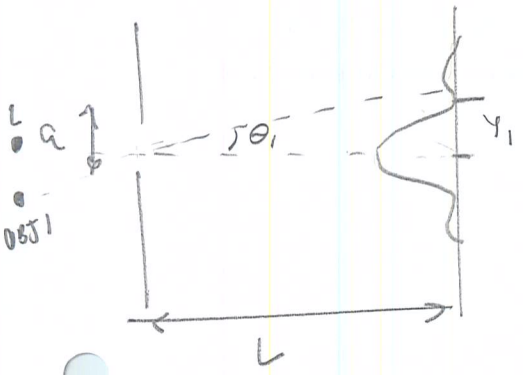
CRITÉRIO DE RESOLUÇÃO

A resolução de objetos iluminados por feixes não paralelos pode ser mensurada usando difração.

Para uma fenda semi-infinita, o 1º mínimo está em:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$$

$\Rightarrow$ MOVER FEIXE NA FENDA P/ VER SE MOVE



Para que dois objetos sejam resolvidos a separação angular mínima entre eles deve ser θ_1.

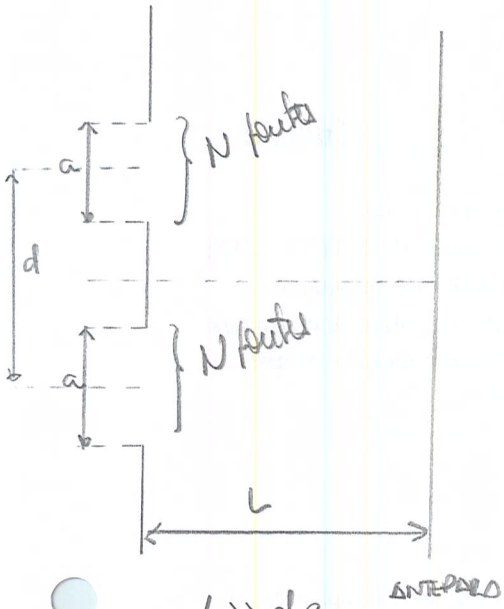
$$\Rightarrow \sin\theta_R = \frac{\lambda}{a} \qquad \theta_R = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Para uma abertura circular, a posição do 1º mínimo é dada por uma função de Bessel.

A condição é ligeiramente diferente: $\sin\theta_R \simeq 1{,}22\frac{\lambda}{a}$ $\Rightarrow$ CRITÉRIO DE RAYLEIGH

$\Rightarrow$ MOSTRAR SLIDES 11 a 16.

DIFRAÇÃO EM FENDA DUPLA



$L \gg d, a$

Para interferência tínhamos:

$$I_I = 4 I_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi_I}{2}\right) \qquad \phi_I = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen}\theta$$

Para difração:

$$I_D = N^2 I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi_D}{2}\right)}{\left(\frac{\phi_D}{2}\right)^2} \qquad \phi_D = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta$$

Quando temos a fenda dupla, temos uma combinação dos dois efeitos.

Fazendo $\beta = \frac{\phi_I}{2}$ e $\alpha = \frac{\phi_D}{2}$

$$\Rightarrow I_{FD} = 4N^2 I_0 \cos^2\beta \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{I_{FD} = I_m \cos^2\beta \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

⇒ MOSTRAS SLIDES

⇒ COM 1 FENDA e COM 2 FENDAS

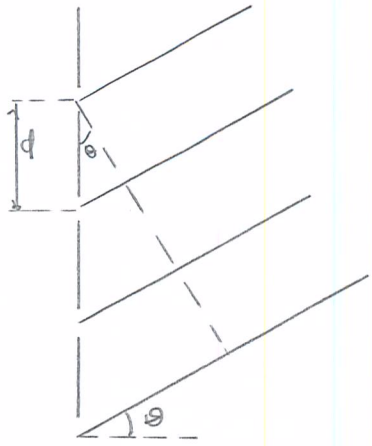
DIFRAÇÃO EM N FENDAS

⇒ Mais conhecido como GRADE DE DIFRAÇÃO ou REDE DE DIFRAÇÃO

⇒ Neste caso, a interferência construtiva entre as fontes das N grades permite que tratemos o problema como fizemos no caso de interferência com fontes pontuais.

⇒ Máximos secundários muito menos intensos.

⇒ SLIDES 20 e 21



As posições dos máximos de interferência ocorrem quando a diferença de caminho entre duas fendas sucessivas é m

$$\Rightarrow d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{m\lambda}{d}\right)}$$ posição dos máximos

θ depende de λ, d e m $\Rightarrow$ graus

$\lambda_{AZUL} < \lambda_{VERMELHO} \Rightarrow \theta_{AZUL} < \theta_{VERMELHO} \Rightarrow \theta$ para medir λ

$\Rightarrow$ Espectrómetro

$\Rightarrow$ Slide 24

A posição pode ser obtida por interferência. A largura, no entanto, é limitada pela difração. No limite de N grande, podemos ver a grade como uma fenda de abertura $a = Nd$

Para $m = 1 \Rightarrow a \operatorname{sen}\theta = \lambda \rightarrow$ 1º mínimo.

Seja a largura $\Delta\theta_0 \Rightarrow \operatorname{sen}\Delta\theta_0 \approx \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$ $\rightarrow$ resolução diminui com N

Para um mínimo de ordem m:

$$\operatorname{sen}\theta_m = \frac{m\lambda}{Nd} \qquad \operatorname{sen}\theta_{m+1} = \frac{(m+1)\lambda}{Nd} \Rightarrow \Delta(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\lambda}{Nd}$$

Mas $\frac{d(\operatorname{sen}\theta)}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow \Delta\theta_m = \frac{\Delta(\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta} = \boxed{\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}}$

θ_m é o ângulo do m-ésimo máximo

DISPERSÃO

Diferentes comprimentos de onda são dispersos em diferente θ.

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} \qquad \lambda = \frac{d \sin\theta}{m} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d}{m}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{m}{d}\frac{1}{\cos\theta}}$$

$\Rightarrow$ maiores θ $\Rightarrow$ maiores D

maiores m

RESOLUÇÃO

A resolução é a largura da linha, agora medida em comprimento de onda.

$$R = \frac{\lambda_{MED}}{\Delta\lambda} \qquad \Delta\lambda = \frac{d}{m}\cos\theta\,\Delta\theta$$

$\lambda_{MED} = \lambda$ para m-ésimo máximo. $\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{d}{m}\cos\theta_m\,\Delta\theta_m = \frac{\cancel{d}}{m}\cdot\frac{\lambda_{MED}}{N\cancel{d}}$

$$\Rightarrow R = \lambda_{MED}\cdot\frac{Nm}{\lambda_{MED}} \Rightarrow \boxed{R = mN}$$

$\Rightarrow$ Aumentar nº de ranhuras aumenta resolução

$\Downarrow$

SLIDE 27

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \text{largura da linha}$$