

F689 Mecânica Quântica
Turma B
1º Semestre de 2015
Lista 4

1. Seja o operador translação \hat{T}_a dado por

$$\hat{T}_a = \exp^{-ia\hat{P}/\hbar} \quad (1)$$

(B) \hat{T}_a é hermitiano?

(A) Mostre as seguintes propriedades deste operador

$$\begin{aligned} \hat{T}_a \hat{T}_b &= \hat{T}_b \hat{T}_a \\ \hat{T}_a^{-1} &= \hat{T}_{-a} \\ \hat{T}_a \hat{T}_a^\dagger &= I \end{aligned} \quad (2)$$

estas propriedades correspondem ao que chamamos de grupo abeliano.

(C) Calcule $[\hat{T}_a, \hat{P}^2/2m]$

(D) Qual é a condição para que $[\hat{T}_a, V(x)] = 0$?

2. Foi dito que a transformada de Fourier é uma mudança de base e portanto uma transformação unitária. Uma consequência de ser uma transformação unitária é o produto escalar é invariante por esta transformação.

(A) Mostre explicitamente que o produto escalar do ket ψ com ϕ na representação de posição

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^3r \phi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \quad (3)$$

podemos escrever nesta forma na representação de momento.

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^3p \phi^*(\vec{p}) \psi(\vec{p}) \quad (4)$$

3. Seja a matrix

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(A) Ache os autovalores e autovetores desta matriz.

4. No oscilador harmônico, o Hamiltoniano foi reescrito em termos dos operadores a e a^\dagger ,

$$H = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2) \quad (6)$$

(A) A quantidade $a^\dagger a \equiv N$ é chamada operador número. Mostre que tem as seguintes propriedades:

$$[N, a] = -a \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (7)$$

(B) Em aula foi mostrado o uso dos operadores de criação e destruição a e a^\dagger que satisfazem as propriedades

$$[a, a^\dagger] = 1, [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0.$$

e foi construído os autovalores e autovetores de H , e portanto do operador número N . Vamos definir o anticomutador $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

Assuma outros dois operadores que satisfazem

$$\{b, b^\dagger\} = 1 \text{ e } \{b, b\} = 0 \quad \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0.$$

Faça uma analogia com o caso feito no livro texto e ache os autovalores e autovetores do operador Hamiltoniano é dado por $H = \Omega_0 M$ onde o operador número é $M = b^\dagger b$.