F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2015
Lista 5

1. Seja o oscilador quântico bidimensional, cujo Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + V(x,y)\right)$$

O potencial deste sistema é

$$V(x,y) = \frac{1}{2}mw^2\left(x^2 + y^2\right)$$

onde podemos usar os operadores escada, que são exatamente os mesmos definidos no Griffiths, página 42, para uma dimensão

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(a + a^\dagger\right) \quad p_x = \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2}i}\left(a - a^\dagger\right) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(b + b^\dagger\right) \quad p_y = \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2}i}\left(b - b^\dagger\right)$$

a constante $\alpha = \sqrt{\dfrac{mw}{\hbar}}$

(A) Calcule os comutadores

$$[a, a^\dagger] \quad [a, b] \quad [a, b^\dagger] \quad [a^\dagger, b] \quad [a^\dagger, b^\dagger] \quad [b, b^\dagger]$$

(B) Escreve o Hamiltoniano e o operador L_z em termos destes operadores escada.

Resposta:

$$\left[\,a, a^\dagger\,\right] = 1 \quad \left[\,a, b\,\right] = 0 \quad \left[\,a, b^\dagger\,\right] = 0 \quad \left[\,a^\dagger, b\,\right] = 0 \quad \left[\,[a^\dagger, b^\dagger\,\right] = 0 \quad \left[\,b, b^\dagger\,\right] = 1$$

$$a_- a_+ + b_- b_+ = \frac{H}{\hbar w} + 1 \quad a_+ a_- + b_+ b_- = \frac{H}{\hbar w} - 1 \quad L_z = -\hbar\left[\,a^\dagger, b\,\right]$$

2. Seja um operador Hermitiano Λ e seja $|\lambda\rangle$ os autovetores tal que

$$\Lambda |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \tag{1}$$

Seja um operador Ω que satisfaz

$$[\Omega, \Lambda] = \Omega \tag{2}$$

(A) Mostre que $\Omega |\lambda\rangle$ é um autovetor de Λ e encontre o autovalor correspondente.

Resposta:

$$\Lambda (\Omega |\lambda\rangle) = (\lambda - 1) (\Omega |\lambda\rangle)$$

portanto é um autovetor com autovalor $\lambda - 1$.

(B) É $\Omega^\dagger |\lambda\rangle$ um autovetor de Λ? Encontre o autovalor correspondente.

Resposta:

Sim é um autovetor.

$$\Lambda \left(\Omega^\dagger |\lambda\rangle\right) = (\lambda + 1) \left(\Omega^\dagger |\lambda\rangle\right)$$

portanto é um autovetor com autovalor $\lambda + 1$.

3. Problema 4.18 do Griffiths. Mostre que o coeficiente A_l^m da Equação (4.120) é

$$L_\pm f_m^l = (A_l^m) f_{m\pm1}^l \tag{3}$$

é dado por

$$(A_l^m) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \tag{4}$$

4. Um sistema está num estado de superposição de estados de momento angular

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |l = 1, m = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |l = 1m = 1\rangle \tag{5}$$

(A) Calcule $\langle L^2\rangle, \langle L_x\rangle, \langle L_y\rangle, \langle L_z\rangle, \langle L_z^2\rangle$.

Resposta:

Sim é um autovetor.

$$\left\langle L^2\right\rangle = 2\hbar^2 \quad \langle L_x\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \quad \langle L_y\rangle = 0 \quad \langle L_z\rangle = \frac{\hbar}{2} \quad \left\langle L_z^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

(B) Uma medida de L_z é feita com valor $\hbar$, quais os possíveis valores de L_x após a medida?

Resposta:

$L_x = -\hbar, 0, \hbar$.

5. Resolva o item d do Problema 4.19 do Griffith

Resposta:

$$[\,L_i, P_j\,] = -i\hbar\epsilon_{ijl}P_l \quad \left[V(\hat{R}), L_i\right] = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(\hat{R})}{\partial R_i}$$

Se o potencial é central então

$$\frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R_i} = \frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{\partial |R|}{\partial R_i} = \frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{R_i}{R}$$

e portanto

$$\left[V(\hat{R}), L_i\right] = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(\hat{R})}{\partial R_i} = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{R_i}{R} = 0$$

pois um quantidade simétrica R_kR_i vezes uma quantidade anti-simétrica ϵ_{ikl} é nula.

6. A base deste sistema são os autovalores de L^2 e L_z.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

O operador $\hat{L}_x$ para o momento angular l=1 é dada por

$$L_x = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

com autovalores $\hbar, 0, -\hbar$. Os autovetores são

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(A) Se o Hamiltoniano é dado por

$$H = \hbar w \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

e se o estado do sistema é

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2}i \\ 7 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Se medirmos o observável L_x, qual a probabilidade de medirmos $\hbar$? Qual é o estado do sistema imediatamente após a medida?
Resposta:

$$P(m_x = 1/2) = 1/2 \quad |\psi_1\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle \to |\psi_1\rangle = |1\rangle$$

(B) O estado do sistema imediatamente após a medida de L_z é um autoestado de energia? Se sim qual é? Se não explique o porquê.

(C) Dado o sistema $|\psi(0)\rangle$ do item (a), encontre o ket $|\Psi(t)\rangle$?

(D) Suponha que medimos L_x no estado $|\Psi(t)\rangle$, qual é a probabilidade de encontrarmos o valor $+\hbar$?

7. Seja um sistema que tem momento angular e a componente z dados por $\hbar^2 l(l+1)$ e m$\hbar$.

   (A) Mostre que $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0 = 0$.

   (B) Mostre que $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle] = \dfrac{\hbar^2 \left(l(l+1) - m^2\right)}{2}$

8. Se uma partícula está no estado

$$\psi(\theta, \phi, 0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\phi \sin\theta \cos\theta \tag{11}$$

Dado:

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} \quad Y_2^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{-i\phi}$$

(A) Quais os possíveis valores de L_z podem ser medidos e quais a probabilidade de ocorrerem?

Resposta:

$l = 1 m_z = 1$ e $m_z = -1$.

(B) Qual é $\langle L_y \rangle$ para este estado?

(C) Qual é $\langle L^2 \rangle$ para este estado?

Resposta:

$$\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2 \tag{12}$$

Não é necessário entregar o exercício 9 no dia 10.

9. Seja uma partícula , que tem como estados de spin na direção z

$$|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

que representam respectivamente spin up e spin down.

(A) Se os estados de spin na direção x são dados por

$$|\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+z\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |-z\rangle \tag{14}$$

qual é a forma de $|\pm x\rangle$ na bases z ? Como podemos escrever a representação matricial de S_x na base z?

(B) Quais são os autovalores dos estados $|\pm x\rangle$ do operador S_x?