F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2015
Prova 2

Nome: RA: Assinatura :

1. Seja um operador $\hat{A}$ que tem a representação matricial dado pela matriz de Pauli σ_y definida por

$$\hat{A} = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e a base deste espaço vetorial é dado por $|1>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|2>= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(A) Este operador é hermitiano? Ache os autovalores e autovetores deste operador.

(B) O operador $\hat{f}(t) = e^{iwt\sigma_y}$ pode ser escrito na forma linealizada $A + B\sigma_y$. Determine A e B desta expressão.

(C) Calcule a derivada de $\hat{f}(t)$, $\dfrac{d\hat{f}(t)}{dt}$.

2. Dados os operadores contínuos, operador posição $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ e operador momento $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$ que satisfazem as equações de autovalores:

$$\begin{array}{rr} \hat{X}\,|r\rangle = x\,|r\rangle & \hat{P}_x\,|p\rangle = p_x\,|p\rangle \\ \hat{Y}\,|r\rangle = y\,|r\rangle & \hat{P}_y\,|p\rangle = p_y\,|p\rangle \\ \hat{Z}\,|r\rangle = z\,|r\rangle & \hat{P}_z\,|p\rangle = p_z\,|p\rangle \end{array}$$

Admita que estes operadores estão definidos em todo o espaço vetorial: $(-\infty, \infty)$.

(A) Mostre que os operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}_x$ são operadores hermitianos.

(B) Calcule os comutadores $[\,X, P_x\,]$ e $[\,Y, P_x\,]$. Com esta informação os operadores $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$ são um conjunto completo de observáveis que comuta (C.C.O.C.)? Justifique a sua resposta.

(C) Dada a equação de autovalores de $\hat{P}_x$, $\hat{P}_x\,|p\rangle = p_x\,|p\rangle$, ache os autovetores deste sistema na representação de posição x.
É dado que a matriz de mudancça da base de momento $|p\rangle$ para a base de posição $|r\rangle$ é $\langle r|p\rangle = v^*_{\vec{p}}(\vec{r}) = \dfrac{e^{-i\vec{p}.\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$.

3. No espaço vetorial de três dimensões temos dois operadores $\hat{\Omega}$ e $\hat{\Lambda}$ que representam observáveis físicos. Estes operadores tem uma representação matricial na **base** $|n\rangle$ dada por

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3/2 & -i & i \\ i & 1 & 1 \\ -i & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

A base $|n\rangle$ é composta de $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Informação adicional: Um operador tem uma representação numa base $|\alpha\rangle$, $\hat{A}$, e em outro base $|\alpha'\rangle$, $\hat{A}'$ são relacionados por $\hat{A}' = U^\dagger A U$ onde U é a matriz de transformação $|\alpha'\rangle = U\,|\beta\rangle$.

(A) Resolva a equação de autovalores de $\hat{\Omega}\,|w\rangle = w\,|w\rangle$ e ache os autovalores e autovetores.

(B) Qual é a matriz de transformação entre a base $|n\rangle$ e a base $|w\rangle$?

(C) Mostre que o operador $\hat{\Lambda}$ **não é diagonal na base** $|w\rangle$, mas é diagonal por blocos (veja abaixo a descrição de ser diagonal por blocos) na base $|w\rangle$, onde A_1 tem tamanho 2×2 e A_2 tem tamanho 1×1.

$$\text{Matrizdiagonalporblocos} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(D) Determine os autovalores e autovetores do bloco de tamanho 2×2 de $\hat{\Lambda}$ e encontre a base em que $\hat{\Omega}$ e $\hat{\Lambda}$ são diagonais.

GABARITO DA PROVA 2

(1) $\hat{A} = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

(a) OPERADOR HERMITIANO $\sigma_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$

É HERMITIANO

EQUAÇÃO DE AUTOVALORES:

$$\sigma_y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left|\begin{pmatrix} -\lambda & i \\ i & -\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\lambda^2 - (-i^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

AUTOVETORES

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$-ib = \pm a \Rightarrow a = \mp ib$

$ia = \pm b$

SUBSTITUINDO

$i(\mp ib) = (\mp i^2 b) = \pm b = \pm b$ OK, SÃO CONSISTENTES.

ENTÃO A NORMALIZAÇÃO $\begin{pmatrix} \mp ib \\ b \end{pmatrix}$

$$|\mp ib|^2 + |b|^2 = 2|b|^2 = 1$$

$|b| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ASSUMINDO $b \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} \pm i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

TESTE DE SANIDADE: SÃO ORTOGONAIS?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} +i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{i^2}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{OK.}$$

BRA = KET*

(D) $$\hat{f}(t) = e^{i\omega t\sigma_y} = \sum \frac{(i\omega t\sigma_y)^n}{n!}$$

TEMOS QUE

$$\sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{n\ \text{PAR}} \frac{(i\omega t\sigma_y)^n}{n!} + \sum_{n\ \text{ÍMPAR}} \frac{(i\omega t\sigma_y)^n}{n!}$$

n PAR $= 2p$ $\qquad$ n ÍMPAR $= 2p+1$

$p = 0, 1, \ldots$ $\qquad$ $p = 0, 1, \ldots$

$$\hat{f}(t) = \sum_p \frac{(i\omega t)^{2p}((\sigma_y)^2)^p}{2p!} + \sum_p \frac{(i\omega t)^{2p+1}}{(2p+1)!}\sigma_y^{2p+1}$$

$(\hat{I})^p = I$ $\qquad$ $\sigma_y^{2p+1} = \hat{I}\sigma_y = \sigma_y$

$$\hat{f}(t) = \sum_p \frac{i^{2p}(\omega t)^{2p}}{2p!} + \sum_p i^{2p+1}\frac{(\omega t)^{2p+1}}{(2p+1)!}\sigma_y$$

$i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$ $\qquad$ $i^{2p+1} = (-1)^p i$

$$f(t) = \sum_p \underbrace{\frac{(-1)^p (\omega t)^{2p}}{(2p)!}}_{\cos\omega t} + i\sigma_y \underbrace{\frac{[(-1)^p (\omega t)^{2p+1}}{(2p+1)!}}_{\sin\omega t}$$

$$f(t) = \cos\omega t + i\sigma_y \sin\omega t$$

(c) $\dfrac{d f(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\{\cos\omega t + i\sigma_y \sin\omega t\} = -\omega \sin\omega t$

$+\omega i\sigma_y \cos\omega t$

2

a) UM OPERADOR É HERMITIANO SE O CONJUGADO HERMITIANO É IGUAL AO OPERADOR,

O CONJUGADO HERMITIANO DE $\hat{A}$ É DEFINIDO POR

$$\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|A^{+}|\psi\rangle^{*}$$

E É HERMITIANO SE

$$\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^{*} \Rightarrow \boxed{A^{+}=A}$$

DA DEFINIÇÃO

$$\langle\varphi|\hat{X}|\psi\rangle \equiv \int d^3r\, \varphi^{*}(r)\, X\, \psi(r) = \int d^3r\, [\varphi(r) X^{*} \psi^{*}(r)]^{*}$$

O PARENTESIS É $\varphi(r)X^{*}\psi^{*}(r) = \psi^{*}(r) X \varphi(r)$

E ENTÃO

$$\langle\varphi|\hat{X}|\psi\rangle = \int d^3r\, [\varphi(r) X^{*} \psi^{*}(r)]^{*} = [\underbrace{\int d^3r\, \psi^{*}(r) X \varphi(r)}_{\langle\psi|\hat{X}|\varphi\rangle}]^{*}$$

PORTANTO

$$\langle\varphi|\hat{X}|\psi\rangle = \langle\psi|X|\varphi\rangle^{*} \Rightarrow \hat{X}^{+} = X$$

PARA $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = \int d^3r \, \varphi^*(\vec{r}) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(r)$$

INTEGRANDO POR PARTES,

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = \int dy\,dz \left\{ \int dx \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^*(r)\,\psi(r)\right]\right) - \int dx \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi^*(r)\right] \psi(r) \right\} \quad (1)$$

O PRIMEIRO TERMO DE (1) É UM DIFERENCIAL TOTAL E ENTÃO

$$\int dx \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^*(r)\,\psi(r)\right]\right) = -i\hbar\, \varphi^*(r)\,\psi(r)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

ASSUMINDO $\varphi(r), \psi(r) \to 0$ $x \to \pm\infty$ E ENTÃO, O PRIMEIRO TERMO É ZERO.

O ÚLTIMO TERMO DE (1)

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = i\hbar \int dy\,dz \int dx \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(r)\right) \psi(r)$$

PODEMOS REESCREVER O LADO DIREITO COMO

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = \left[-i\hbar \int dy\,dz \int dx \left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\right) \psi^*(r) \right]^*$$

TROCANDO A ORDEM

$$\langle\varphi|\hat{P}_x|\psi\rangle = \left[-i\hbar\int dy\,dz\int dx\,\psi^*(r)\,\frac{\partial}{\partial x}\varphi(r)\right]^*$$

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \left[\int dy\,dz\int dx\,\psi^*(r)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(r)\right]^*$$

P_x

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \langle\psi|P_x|\varphi\rangle^*$$

$P_x^+ = P_x$ $\quad P_x$ É HERMITIANO.

(B)

CALCULE $[\hat{X}, \hat{P}_x]$ e $[\hat{Y}, P_x]$

$$\langle r|[\hat{X}, \hat{P}_x]|\psi\rangle = \langle r|\hat{X}P_x - P_x X|\psi\rangle = \langle r|X\hat{P}_x - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)X|\psi\rangle$$

$$\langle r|[\hat{X}, P_x]|\psi\rangle = x\langle r|P_x|\psi\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\langle r|\hat{X}|\psi\rangle}_{(x\langle r|\psi\rangle)}$$

REGRA DA CADEIA

$$\langle r|[\hat{X}, P_x]|\psi\rangle = \cancel{x\langle r|P_x|\psi\rangle} + i\hbar\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\langle r|\psi\rangle + \cancel{x\frac{\partial}{\partial x}\langle r|\psi\rangle}\right\}$$

$$\langle r|[\hat{X}, P_x]|\psi\rangle = \langle r|i\hbar|\psi\rangle$$

$$[\hat{X}, \hat{P}_x] = i\hbar$$

PARA

REPETINDO OS MESMOS PASSOS

$$\langle n|[Y,P_x]|\psi\rangle = \cancel{Y\langle n|P_x|\psi\rangle} - (i\hbar)\left\{ \frac{\partial Y}{\partial x}\langle n|\psi\rangle + \cancel{Y\partial_x\langle n|\psi\rangle} \right\}$$

$= 0!!$

$$\langle n|[Y,P_x]|\psi\rangle = 0 \qquad [Y,P_x]=0$$

DE FORMA ANÁLOGA SE $[\hat{X}_i,\hat{P}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$.

ENTÃO OS OPERADORES $\hat{X},\hat{Y},\hat{Z},\hat{P}_x,\hat{P}_y,\hat{P}_z$ NÃO

FORMAM UM CCOC.

(C)

$$P_x|p\rangle = p_x|p\rangle$$

A REPRESENTAÇÃO DE POSIÇÃO $|x\rangle$

$$\langle x|\hat{P}_x|p\rangle = \langle x|p_x|p\rangle$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\langle x|p\rangle}_{\psi_p(x)} = p_x\underbrace{\langle x|p\rangle}_{\psi_p(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_p(x) = -\frac{p_x}{i\hbar}\psi_p(x) \Longrightarrow \boxed{\psi_p(x) = A e^{-\frac{p_x x}{i\hbar}}}$$

AUTOVETOR DO OPERADOR P_x.

PARA AS OUTRAS TRÊS FUNÇÕES TEMOS

$$\psi_p(y) = A e^{\frac{+i p_y y}{\hbar}} \qquad \psi_p(\vec{r}) = A e^{\frac{i p_x x}{\hbar}} e^{\frac{i p_y y}{\hbar}} e^{\frac{i p_z z}{\hbar}} = A e^{\frac{i\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}.$$

(3)

(A) O OPERADOR $\hat{\Lambda}$ É

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ESTE OPERADOR É HERMITIANO E PORTANTO SÓ TEM AUTOVALORES REAIS.

$$\Lambda^{\dagger} = \Lambda$$

AUTOVALORES

$$\Lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -i & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left\{(1-\lambda)(2-\lambda)\right\} + i\left\{+i(1-\lambda)\right\} = 0$$

$$(1-\lambda)\left\{(2-\lambda)^2 - 1\right\} = 0$$

$$\lambda = 1 \qquad (2-\lambda) = \pm 1$$

$$\lambda = 2 \mp 1 \rightarrow 3, \; \rightarrow 1$$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_{2,3} = 1$

OS CORRESPONDENTES AUTOVETORES SÃO,

PARA $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2a + ic = 3a \quad (1) \\ b = 3b \implies b = 0 \\ -ia + 2c = 3c \quad (2) \end{matrix}$$

DA EQ. (1),

$ic = a$

E DA EQ (2)

$$\begin{cases} c = -ia \\ ic = a \end{cases}$$

AMBAS SÃO AUTOCONSISTENTES E NÃO SÃO CONTRADITÓRIAS.

DA CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a|^2 + 0 + |-ia|^2 = 2|a|^2 = 1 \qquad |a| = 1/\sqrt{2}$$

ENTÃO TEMOS

$$a = 1/\sqrt{2} \qquad c = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

O AUTOVETOR $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

O OUTRO AUTOVETOR DEVE TER

$\langle \lambda_3 | \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_3 | \lambda_1 \rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b^* = 0 \qquad \boxed{b=0}$$

PORTANTO SE $b=0 \Rightarrow$ DE (5) TEMOS $2|c|^2=1$

$$\boxed{c = 1/\sqrt{2}}$$

ENTÃO

$$|\lambda_3\rangle = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

CONSISTÊNCIA,

$$\langle \lambda_1 | \lambda_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} + \frac{i}{2} = 0$$

OK!!

ENTÃO TEMOS OS TRÊS AUTOVETORES

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6) \qquad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7) \qquad |\lambda_3\rangle = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

OS OUTROS DOIS AUTOVETORES SÃO

$\lambda_{2,3} = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$2a + ic = a \quad (3)$

$b = b \quad \forall b$

$-ia + 2c = c \quad (4)$

DE (3), e DE (4)

$a = -ic \qquad c = ia$

$ia = -i^2 c = c$ SÃO AUTO-CONSISTENTES.

ENTÃO OS AUTOVETORES CORRESPONDENTES A $\lambda_{2,3}$ É

$$\begin{pmatrix} -ic \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

DA CONDIÇÃO DE NORMALIZAÇÃO

$|-ic|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 2|c|^2 + |b|^2 = 1$ (5)

INDETERMINADO.

PRECISAMOS ESCOLHER DE TAL FORMA QUE

$\langle \lambda_3 | \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_{2,3} | \lambda_1 \rangle = 0$

O MAIS SIMPLES CASO É ESCOLHER $c = 0$, PORTANTO

$b = 1. \qquad |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ QUE É ORTOGONAL À $|\lambda_1\rangle$?

TESTE DE CONSISTÊNCIA: A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DEVE SER UNITÁRIA.

$$U^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$UU^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 - i^2/2 & 0 & -i/2 + i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{2} - \frac{i}{2} & 0 & -\frac{i^2}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É UNITÁRIA.

(D) O OPERADOR $\hat{\Lambda}$ PARA NA OPERAÇÃO É NA BASE $|n\rangle$, PARA SABER EM OUTRA BASE É DADO NO PROBLEMA,

$$|n\rangle \rightarrow |\omega\rangle = U|n\rangle$$

ENTÃO $\hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}' = U^{\dagger}\Lambda U$

(B) A BASE $|n\rangle$ É A BASE DA FORMA MATRICIAL DOS OPERADORES $\hat{\Pi}$ e $\hat{\Lambda}$ PARA NA PROVA.

$$|n\rangle: \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A BASE $|\omega\rangle$ É A QUE FOI ENCONTRADA NO ITEM ANTERIOR. VAMOS ESCREVER

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}}_{|\omega\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO}} \underbrace{\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}}_{|n\rangle}$$

DAS EQUAÇÕES (6), (7) e (8) TEMOS,

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1\rangle \\ |\lambda_2\rangle \\ |\lambda_3\rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix} \qquad (9)$$

A MATRIZ $\hat{\Lambda}$ NA BASE $\{\omega\}$ NÃO É DIAGONAL.

MAS É DIAGONAL POR BLOCOS.

USANDO A EQUAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO

$$\hat{\Lambda}' = U^{+} \Lambda U$$

$$\Lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 3/2 - i^2 & -i + i & i + 3i/2 \\ i\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}i - i & -i^2 + 1 & i^2 + 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZAR POR BLOCOS VAMOS ~~ACHAR~~ ACHAR

OS AUTOVALORES

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow (1-\lambda)(1/2-\lambda)-2=0$$

$$\lambda^2 - \frac{3\lambda}{2} + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{3/2 \pm \sqrt{9/4 + 12/2}}{2}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = -3/2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 3/2$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

AUTOVETORES

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$a + \sqrt{2}b = \lambda_1 a \qquad \sqrt{2}b = (\lambda_1 - 1)a \Longrightarrow b = \frac{(\lambda_1-1)a}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}a + b/2 = \lambda_1 b \qquad \sqrt{2}a = (\lambda_1 - 1/2)b$$

FAZENDO A MULTIPLICAÇÃO

$$2ab = \underbrace{(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - 1/2)}_{2 \to \text{PELA EQUAÇÃO DE AUTOVALORES}} ab$$

SÃO EQUAÇÕES CONSISTENTES.

ENTÃO OS AUTOVETORES SÃO $b = \frac{(\lambda_i - 1)a}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{pmatrix} a \\ \frac{(\lambda_1 - 1)a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ PARA O 1º AUTOVETOR E

$$\begin{pmatrix} a' \\ \frac{(\lambda_2 - 1)a'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ PARA O SEGUNDO AUTOVETOR,

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\omega\rangle = U'|\omega'\rangle} \rightarrow$$ ESTA BASE DIAGONALIZARÁ