UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FISICA
GLEB WATAGHIN

57

DRCC - IFGW

$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$

VAMOS REESCREVER ESTAS AMPLITUDES EM FUNÇÃO DE s, t e u.

$u = (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2$

$t = (p_A - p_C)^2 = (p_D - p_B)^2$

NUMERADOR $(p_A + p_C)(-p_B - p_D) = -p_A \cdot p_B - p_A \cdot p_D - p_C \cdot p_B - p_C \cdot p_D$

$s = (p_A + p_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2 p_A p_B$ $\quad s - u = \underbrace{p_B^2 - p_D^2}_{} + 2 p_A \cdot (p_B + p_D)$

$u = (p_A - p_D)^2 = p_A^2 + p_D^2 - 2 p_A p_D$ $\quad s - u = (p_B - p_D)(p_B + p_D) + 2 p_A (p_B + p_D)$

$s - u = (p_B + p_D)\{ p_B - p_D + 2 p_A \}$ $\quad p_B - p_D = p_C - p_A$

$s - u = (p_B + p_D \{ p_C - p_A + 2 p_A \}$

$$\boxed{s - u = (p_B + p_D)(p_C + p_A)}$$

O OUTRO DENOMINADOR $\quad (p_A - p_B)(p_D + p_C)$

$u - t = (p_A - p_D)^2 - (p_A - p_C)^2 = -2 p_A \cdot p_D + p_D^2 + 2 p_A \cdot p_C - p_C^2$

$u - t = 2 p_A (p_C - p_D) + p_D^2 - p_C^2 = 2 p_A (p_C - p_D) + (p_D - p_C)(p_D + p_C)$

$u - t = (p_C - p_D)\{ 2 p_A - p_D - p_C \} = (p_C - p_D)(2 p_A - p_A - p_B)$

Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

$$u-t = (p_C - p_D)(p_A - p_B) \qquad s-u = (p_D + p_B)\cdot(p_C + p_A)$$

ENTÃO O DENOMINADOR

$$(p_D - p_B)^2 = t$$

$$(p_C + p_D)^2 = s$$

JUNTANDO TUDO

TAMBÉM PODEMOS

$$u-t+s-u = s-t = (p_C - p_D)(p_A - p_B)$$

$$= p_C p_A - \cancel{p_C p_B} - \cancel{p_D p_A}$$

$$+ (p_D + p_B)(p_C + p_A) = \cancel{p_D p_A} + \cancel{p_B p_C} + p_B p_A =$$

$$+ p_D p_B + p_D p_C$$

$$p_A(p_B + p_C) + p_D(p_B + p_C) = (p_A + p_D)(p_D + p_C)$$

$$-i\mathcal{M}_{e^+e^- \to e^+e^-} = -i\left[+ \frac{e^2(s-u)}{t} \quad \frac{+e^2(t-u)}{s} \right]$$

COMPLETAMENTE ESCRITA EM TERMOS DAS VARIÁVEIS DE MANDELSTAM. ESTA EQUAÇÃO TEM A INVARIÂNCIA DE TROCAR $s \leftrightarrow t$.

A EXPRESSÃO DE AMPLITUDE DE $e^-e^- \to e^-e^-$ TAMBÉM PODE SER TRANSFORMADA, USANDO $s-u$ e $u-t$ ACIMA DESCRITOS TEMOS

$$-i\mathcal{M}_{e^-e^- \to e^-e^-} = -i\left[\frac{-e^2(s-u)}{t} \quad \frac{-e^2(s-t)}{u} \right]$$

$$\mathcal{M}_{e^-e^- \to e^-e^-} = e^2 \left\{ \frac{(u-s)}{t} + \frac{(t-s)}{u} \right\}$$

PODERÍAMOS TER OBTIDO FAZENDO CROSSING.

~~COMPARANDO AS EXPRESSÕES~~

NO ESPALHAMENTO

$$\mathcal{M}_{e^-e^-\to e^-e^-} = e^2\left(\frac{u-s}{t} + \frac{t-s}{u}\right)$$

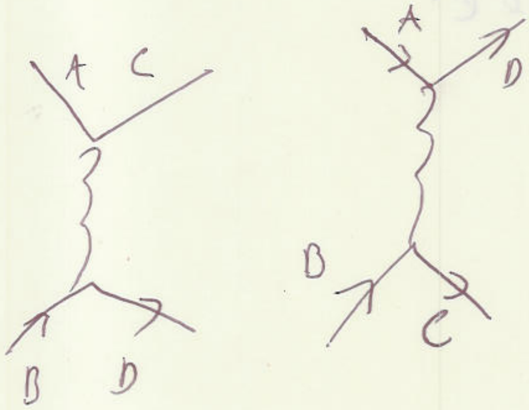
ESTA EXPRESSÃO É SINGULAR SE t OU u SÃO ZEROS.

CONFORME MOSTRADO ANTES,

TEMOS QUE NO REF. CM,

$$-t = (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2$$

$$-u = (\vec{p}_A - \vec{p}_D)^2$$



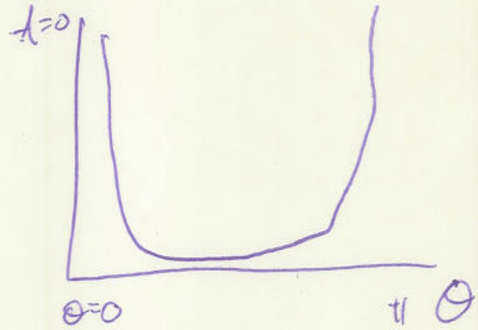
ENTÃO QUANDO $t \to 0$ ($u \to 0$) O MOMENTO NO FÓTON É ZERO.

SE O MOMENTO TRANSFERIDO $-q^2$ É PEQUENO $-q^2 = 0$ ENTÃO O FÓTON É CHAMADO QUASE NA CAMADA DE MASSA.

$$t = (p_A - p_C)^2 = -2p^2(1-\cos\theta)$$

$$u = -2p^2(1+\cos\theta)$$

ISTO PODE SER REPRESENTADO UMA



Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
Caixa Postal 6165 13.083-970 Campinas SP Brasil

Tel.: (0192) 39-8112
Telex: (019) 1150
Fax: (0192) 39-3127

RESUMINDO

- DEDUZIMOS A EXPANSÃO EM SÉRIE DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO $i \to f$.
- APRENDEMOS COMO INTRODUZIR A INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA PARA PARTÍCULAS SEM SPIN
- CALCULAMOS OS PROCESSOS DE ESPALHAMENTO

- ESPALHAMENTO MOLLER: $e^-e^- \to e^-e^-$

- ESPALHAMENTO BHABHA: $e^-e^+ \to e^-e^+$

UNICAMP

CAPÍTULO 5 DO HALZEN

EQUAÇÃO DE DIRAC!

NO CAPÍTULO ANTERIOR MOSTRAMOS COMO INTRODUZIR INTERAÇÃO ENTRE PARTÍCULAS SEM SPIN. MAS SABEMOS QUE ELÉTRONS E PÓSITRONS TÊM SPIN 1/2.
QUEREMOS UMA EQUAÇÃO RELATIVÍSTICA EM QUE NO LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO TENHAMOS UMA MATRIZ DE DOIS COMPONENTES, SPIN UP E SPIN DOWN.

DIRAC PROPÔS UM HAMILTONIANO COM DEPENDÊNCIA LINEAR COM O TEMPO, NA EQUAÇÃO DE KG, TEMOS

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \Rightarrow E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

NA EQ. SCHRÖDINGER TEMOS $E = \frac{p^2}{2m}$ $\quad H\psi = \frac{\nabla^2}{2m}\psi$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

(PRONTOS ESCREVER

$$i\partial_t\psi = H\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)\psi$$

COM $\vec{\alpha}$ E β A SEREM DETERMINADOS POR CONSISTÊNCIA.

COMO QQ SOLUÇÃO DEVE SATISFAZER A RELAÇÃO DE EINSTEIN, $E^2=p^2+m^2$, ENTÃO

$$H^2\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)^2\psi = (\vec{p}^2+m^2)\psi$$

$$(\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m) = \alpha_i \alpha_j P_i P_j + \alpha_i P_i \beta m + \beta \alpha_j P_j m + \beta^2 m^2$$

∄ TERMO LINEAR EM P, ENTÃO

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \qquad E \qquad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad i\neq j$$

$$\beta^2 = I \qquad \alpha_i^2 = I$$

SE α_i E β SÃO NÚMEROS ESTAS EQUAÇÕES NÃO TEM SOLUÇÃO.

63

UNICAMP

~~PROD~~ PODEMOS INTRODUZIR ~~VARIÁVEIS GRASSMANN~~

COMO α_i e β FOSSEM MATRIZES.

ESTAS MATRIZES TÊM

$$\begin{cases} \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \qquad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \\ \beta^2 = \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

COMO O HAMILTONIANO É REAL, $H = H^+$.

ENTÃO ISTO SÓ OCORRE SE $\alpha_i^+ = \alpha_i$ e $\beta^+ = \beta$.

PROPRIEDADES

~~$Tr(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) = Tr(\alpha_i\beta) + Tr$~~

$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$ $\quad \leftarrow \times\beta$

$\alpha_i + \beta\alpha_i\beta = 0 \Rightarrow Tr\,\alpha_i = -Tr(\beta\alpha_i\beta)$

USANDO PROPRIEDADE CÍCLICA

$Tr\,\alpha_i = -Tr(\alpha_i\beta^2) = -Tr\,\alpha_i \Rightarrow \boxed{Tr\,\alpha_i = 0}$

$\times\,\alpha_i \rightarrow \quad \beta + \alpha_i\beta\alpha_i = 0 \Rightarrow \boxed{Tr\,\beta = 0}$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

SEJA α_i TAL QUE OS AUTOVALORES SÃO λ_i

$$\alpha_i |\alpha_i\rangle = \lambda_i |\alpha_i\rangle$$

$\times \alpha_i$

$$\alpha_i^2 |\alpha_i\rangle = \lambda_i \alpha_i |\alpha_i\rangle = (\lambda_i)^2 |\alpha_i\rangle = |\alpha_i\rangle$$

ENTÃO $\boxed{\lambda_i^2 = 1.}$ $\Rightarrow$ PORTANTO $\lambda_i = \pm 1$.

COMO λ_i e β TEM AUTOVALORES ± 1 E TRAÇO NULO, ENTÃO POSSA ENCONTRAR UMA REPRESENTAÇÃO EM QUE λ_3 É DIAGONAL COM OS VALORES DIAGONAIS IGUAIS A +1 OU -1.

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & +1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

COMO $\text{tr}\,\lambda_i = 0$ SÓ PODEMOS TER UM NÚMERO IGUAL DE AUTOVALORES +1 e -1, PORTANTO A DIMENSÃO É PAR.

NECESSITAMOS DE 4 MATRIZES α_i, β QUE SÃO ANTICOMUTAM. COM DIMENSIONALIDADE 2, TEMOS AS MATRIZES DE PAULI, σ_i. AS MATRIZES DE PAULI $i=1,3$ SÃO INDEPENDENTES E PORTANTO NÃO EXISTEM UMA QUARTA MATRIZ ANTICOMUTANTE.

UNICAMP

(65)

ENTÃO O PRÓXIMO DIMENSÃO É N=4.

EXISTEM VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DESTAS MATRIZES.

IREMOS CONSTRUIR 4 MATRIZES COMO

$\gamma^0 = \beta$

$\gamma^i = \beta\alpha^i$

AS PROPRIEDADES DE γ^0 e γ^i SÃO

$\gamma^{0\,2} = (\gamma^i)^2 = \beta\alpha_i\beta\alpha_i = -\beta^2\alpha_i^2 = -1$

$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \{\beta, \beta\alpha^i\} = \beta\beta\alpha^i + \beta\alpha^i\beta$

$tr\,\gamma^0 = tr\,\beta = 0$

$= \alpha^i + \beta\alpha_i\beta = +\alpha^i - \alpha_i\beta^2 = 0$

~~$tr\,\gamma^i = tr\,\beta\alpha_i$~~

$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \{\beta\alpha^i, \beta\alpha^j\} = \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i$

$= -\beta^2\alpha_i\alpha_j - \alpha^j\beta^2\alpha^i = -\alpha^i\alpha^j - \alpha^j\alpha^i = 0$

PORTANTO

ALÉM DISTO DE FORMA ANÁLOGA $\boxed{tr\,\gamma^i = 0}$

$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \gamma^i + \gamma^0\gamma^i\gamma^0$

γ^0

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

CARÁTER CÍCLICO

$$tr\,\gamma_i = tr(\gamma^i\beta^2) = -tr(\beta\gamma^i\beta) = -tr(\gamma^i\beta^2) = -tr\,\gamma^i$$

ENTÃO

$$\boxed{tr\,\gamma_i = 0}$$

O HALZEN INTRODUZ UMA REPRESENTAÇÃO NA FORMA

CUIDADO DIFERENTES LIVROS USAM O MESMO NOME, MAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

ONDE $\vec{\sigma} = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right.$

ESTA É A CHAMADA REPRESENTAÇÃO DE PAULI-DIRAC.

OUTRA MUITO USADA É A REPRESENTAÇÃO DE WEYL,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma^i = \beta\alpha^i$

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ENTÃO A EQUAÇÃO QUE PROCURAMOS É

$$i\partial_t\psi = H\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi$$

COMO $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ SÃO REPRESENTADAS POR UMA MATRIZ 4x4, A SOLUÇÃO ψ É UM VETOR COLUNA DE 4x1, CHAMADO

ESPINOR DE DIRAC

(67)

UNICAMP

A EQUAÇÃO DE DIRAC É

NO LIMITE NÃO RELATIVISTICO (PARA TIMHOS)

$$i\partial_t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

O SPIN UP E O SPIN DOWN

$$\boxed{\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

~~ESTA EQUAÇÃO~~

A FORMA DA EQ. DE DIRAC

$$i\partial_t\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi$$

SE MULTIPLICARMOS β PELA ESQUERDA

$$\vec{p} \Rightarrow i\hbar\vec{\nabla}$$

$$i\underbrace{\beta}_{\gamma^0}\partial_t\psi = (\underbrace{\beta\vec{\alpha}}_{\vec{\gamma}}\cdot\vec{p} + \underbrace{\beta^2}_{I} m)\psi$$

ENTÃO $i\gamma^0\partial_t\psi - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}\psi - m\psi = 0$

$$\underline{i(\gamma^0\partial_t\psi - \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla})\psi} - m\psi$$

DEFINIMOS $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ $\rightarrow$ $\boxed{i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0}$ FORMA COVARIANTE DA EQ. DE DIRAC

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

AS PROPRIEDADES E $\gamma^0, \vec{\gamma}$ SÃO

$$(\gamma^0)^2 = I \qquad \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0 \qquad \gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = 2I$$

$$(\gamma^i)^2 = -I \qquad \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 0 \qquad \gamma^i\gamma^i + \gamma^i\gamma^i = -2I$$

PODEMOS SINTETIZAR NUMA EQUAÇÃO

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

EQUAÇÃO DA ALGEBRA DAS MATRIZES, TODAS AS PROPRIEDADES

SÃO DERIVADAS DESTA EQUAÇÃO.

OUTRAS PROPRIEDADES

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \qquad \alpha^{i\dagger} = \alpha^i$$

$$(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha^i)^\dagger = \alpha^{i\dagger}\beta^\dagger = \alpha^i\beta = -\gamma^i$$

E γ^i ?

ENTÃO $\begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i = -\gamma^i(\gamma^0)^2 = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0}$

O CAMPO DE DIRAC É REAL OU COMPLEXO?

$$i(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) - m\psi$$

TOMANDO O # RACC

(69)

SE ESCREVESSEMOS EM TERMOS DE $\psi^\dagger$ NÃO SERIA COVARIANTE.

$-i\partial_0\psi^\dagger\gamma^0 - i\partial_i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0$

$-i\partial_0\psi^\dagger + i\partial_i\psi^\dagger\gamma^i - m\psi^\dagger = 0$

NÃO ESTÁ NA FORMA COVARIANTE

$-i(\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$

$-i(\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}) - m\psi^\dagger = 0$

$\quad \hookrightarrow \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$-i(\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0) - m\psi^\dagger = 0$ MULTIPLICANDO POR γ^0 $\leftarrow$

$-i(\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu - m\psi^\dagger\gamma^0) = 0$ SE DEFINIMOS $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$

QUE É O CAMPO ADJUNTO.

$\boxed{+i(\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu) + m\bar\psi) = 0}$ $\rightarrow$ EQUAÇÃO DIFERENTE, O CAMPO DE DIRAC É COMPLEXO.

CORRENTES CONSERVADAS NA EQ. DE DIRAC

PROCEDEREMOS DE FORMA ANÁLOGA AO DA EQ. KG,

$$i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k}\psi - m\psi = 0$$

E A EQUAÇÃO CONJUGADA

$$-i\frac{\partial}{\partial x^0}\bar\psi\gamma^0 - i\frac{\partial}{\partial x^i}\bar\psi\gamma^i - m\bar\psi = 0$$

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

~~ESTÃO TERÍCAMOS~~

PARA ACHAR A CORRENTE VAMOS ~~USO~~

$\overrightarrow{\times\bar{\Psi}}$ $i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^i\partial_i\psi - m\psi = 0$

$\overleftarrow{\times\psi}$

$i\partial_0\bar{\Psi}\gamma^0 + i\partial_i\bar{\Psi}\gamma^i + m\bar{\Psi} = 0$

SOMANDO

$i\bar{\Psi}\gamma^0\partial_0\psi + i\bar{\Psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\bar{\Psi}\psi$

$+\partial_0\bar{\Psi}\gamma^0\psi + i\partial_i\bar{\Psi}\gamma^i\psi + m\bar{\Psi}\psi = 0$

$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\psi = 0$

USANDO REGRA DA CADEIA $\quad \bar{\Psi}^{+} = (\psi^+\gamma^0)^+ = \gamma^{0+}\psi$

$\partial_\mu[i\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi] = 0 \longrightarrow j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$

ESTE TERMO É REAL? $\quad j^{\mu +} = (\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi)^+ = \psi^+\gamma^{\mu +}\bar{\Psi}^+ = \psi^+\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu +}\gamma^{0+}\psi$

$= \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$ É REAL

O TERMO $j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$ É UM CASO PARTICULAR

É UM NÚMERO!

DO QUE CHAMAMOS BILINEARES: $\bar{\Psi}\Gamma\psi$

$(\quad)_{1\times4}(\quad)_{4\times4}(\quad)_{4\times1} = 1\times1$

A PARTE TEMPORAL

$j^0 \equiv \rho = \bar{\Psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi = |\psi|^2 > 0$