UNICAMP

(71)

EM ANALOGIA COM O CASO DE KG, j^μ VAI SER ASSOCIADO COM UMA CORRENTE ELÉTRICA,

$$\boxed{j^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi}$$

COM $\partial_\mu j^\mu = 0$

$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \partial_t \rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

$\rightarrow$ DESTA EQUAÇÃO IMPLICA QUE j^μ É UM 4-VETOR.

A CARGA SERÁ

$$Q = \int \rho_0 d^3x = \int (-e)|\psi|^2 d^3x$$

PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi) = 0$$

SE OPERARMOS $i\gamma^\nu\partial_\nu$

$$i\gamma^\nu\partial_\nu(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi) = 0 \quad i^2\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu\psi - m\underbrace{i\gamma^\nu\partial_\nu\psi}_{m\psi} = 0$$

COMO $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$\gamma^\nu\gamma^\mu = \frac{[\gamma^\nu, \gamma^\mu]}{2} + \frac{\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}}{2}$$

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu = \left\{\frac{[\gamma^\nu, \gamma^\mu]}{2} + \frac{\overbrace{\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}}^{2g^{\nu\mu}}}{2}\right\}\partial_\nu\partial_\mu$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM TERMO SIMÉTRICO COM UM ANTISIMÉTRICO

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

ENTÃO

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu = g^{\nu\mu} \partial_\nu \partial^\mu = \Box^2$$

PORTANTO

$$i\gamma_\nu \partial_\nu \psi \,[\text{EQ. DIRAC}] = -\Box^2\psi - m^2\psi = 0 \Rightarrow \text{EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON}$$

ENTÃO SE ψ É UMA SOLUÇÃO DE EQ DIRAC → TAMBÉM É SOLUÇÃO DA EQ. DE KG. O VICE-VERSA NÃO É VERDADE.

SOLUÇÕES LIVRES DA EQ DIRAC

VAMOS COLOCAR UMA SOLUÇÃO NA FORMA

$$\psi = u(\vec{p})\, e^{-ipx}$$

ONDE $u(\vec{p})$ É UM ESPINOR,

~~SEPARANDO~~ SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO DE DIRAC OBTEMOS,

$$\psi = u(\vec{p})\, e^{-ipx}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

$$\partial_\mu \psi = \partial_\mu u(\vec{p})\, e^{-ipx} \quad e^{-ip_\mu x}$$

$$= u(\vec{p})(-ip_\mu)\, e^{-ipx} \longrightarrow$$

PORTANTO

$$i\gamma^\mu(-ip_\mu\psi) - m\psi = 0$$

O TERMO EXPONENCIAL SE FATORA

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0$$

E PORTANTO $u(\vec{p})$ SE OBTÉM A PARTIR DESTA EQUAÇÃO.

(13)

UNICAMP

SOLUÇÕES NO REFERENCIAL EM REPOUSO,

$u(\vec{p}) \longrightarrow u(\vec{p}=0)=u(0)$ PARA ACHAR $u(0)$ DA EQUAÇÃO

OBTEMOS

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0 \xRightarrow{\text{R. REPOUSO}} (\gamma^0 p_0 - m)(u(\vec{p}=0)) = 0$$

COMO $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\gamma^0 p_0 - mI = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & -p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

$\gamma^0 p_0 - m = \begin{pmatrix} p_0+m & 0 \\ 0 & -p_0+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ PORTANTO

SABEMOS QUE TEMOS DOIS TIPOS DE SOLUÇÕES: $E>0$ e $E<0$.

$Hu = \beta m u = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} u$ COMO u É 4x1 TEMOS

QUATRO AUTOVALORES $E = \underbrace{m, m}_{\text{ELÉTRONS}}, \underbrace{-m, -m}_{\text{POSITRONS}}$

COM AUTOVETORES

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PARA $\vec{p} \neq 0$, PODEMOS CONSTRUIR OS ESTADOS DE DUAS FORMAS.

1º MÉTODO DO HALZEN,

PARA $\vec{p} \neq 0$ TEMOS

$$Hu = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)u = Eu \quad \text{USANDO } \vec{\alpha} \text{ e } \beta$$

$$Hu = \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\right] u = Eu$$

ESCREVENDO $u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ ONDE u_A É A PARTE SUPERIOR DO ESPINOR

u_B É A PARTE INFERIOR DO ESPINOR.

ENTÃO TEMOS,

$$Hu = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{TEMOS DUAS EQUAÇÕES}} \begin{cases} m u_A + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_B = E u_A \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_A - m u_B = E u_B \end{cases}$$

COMO TEMOS ESTADOS DE ENERGIA POSITIVA E NEGATIVA, E SÃO DUPLAMENTE DEGENERADOS, ENTÃO É NECESSÁRIO SEPARAR PARA ESSO EM DUAS SOLUÇÕES:

$$u_A^{(1)} = \chi^{(1)} \qquad \text{ONDE } \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ E } \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ QUE CORRESPONDEM AOS ESTADOS DE ESSO

$s = 1, 2$ ~~PARA~~ QUANDO $\vec{p} \to 0$.

UNICAMP

ENTÃO $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$, SÓ PRECISAMOS ACHAR

$u_B^{(s)}$. DA 2ª EQUAÇÃO TEMOS

$$\boxed{u_B^{(s)} = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, u_A^{(s)}}{E+m}} \qquad u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$$

E PORTANTO A SOLUÇÃO É

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \chi^{(s)}}{E+m} \end{pmatrix} \qquad E>0 \quad s=1,2$$

OBSERVE QUE NO LIMITE $\vec{p} \to 0$ RECUPERAMOS A SOLUÇÃO NO REFERENCIAL EM REPOUSO.

N → NORMALIZAÇÃO.

PARA $E<0$, CONFORME ANTES $u_B^{(s)} = \chi^{(s)}_{s=3,4}$ E PORTANTO

PRECISAMOS ACHAR $u_A^{(s)}{}_{s=3,4}$. DA 1ª EQUAÇÃO

$$u_{A\ s=3,4}^{(s)} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ u_B^{(s)}}{E-m} = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ u_B^{(s)}}{|E|+m}$$

E PORTANTO

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\ \chi^{s}}{|E|+m} \\ \chi^{s} \end{pmatrix} \qquad E<0$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PODEMOS CARACTERIZAR AS DUAS SOLUÇÕES DE EDO, POR UMA QUANTIDADE CHAMADA HELICIDADE.

$$h = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}$$

COMO $H = \vec{\sigma}\cdot\vec{p} + \beta m$

$$[H,h] = \left[\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & \phi \\ \phi & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}\right]$$

TEMOS

$$\begin{pmatrix} m & \sigma_i \hat{p}_i \\ \sigma_i \hat{p}_i & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_j \hat{p}_j & \phi \\ \phi & \sigma_j \hat{p}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\sigma_j \hat{p}_j & \sigma_i\sigma_j \hat{p}_i\hat{p}_j \\ \sigma_i\sigma_j \hat{p}_i\hat{p}_j & -m\sigma_j\hat{p}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\sigma_j\hat{p}_j & \hat{p}\cdot\hat{p} \\ \hat{p}\cdot\hat{p} & m\sigma_j\hat{p}_j \end{pmatrix}$$

A RELAÇÃO DAS MATRIZES DE PAULI

IDÊNTICO

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

E PORTANTO $\underbrace{\sigma_i\sigma_j \hat{p}_i\hat{p}_j}_{\text{SIMÉTRICO}} = \delta_{ij}\hat{p}_i\hat{p}_j = \hat{p}\cdot\hat{p}$

O OUTRO TERMO

$$\begin{pmatrix} \sigma_i \hat{p}_i & \phi \\ \phi & \sigma_i\hat{p}_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \sigma_j \hat{p}_j \\ \sigma_j\hat{p}_j & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\sigma_i\hat{p}_i & \sigma_i\sigma_j \hat{p}_i\hat{p}_j \\ \sigma_i\sigma_j\hat{p}_i\hat{p}_j & -\sigma_i\hat{p}_i m \end{pmatrix}$$

PORTANTO

$$\boxed{[H,h] = 0}$$

PORTANTO PODEMOS DENOMINAR OS AUTOVETORES PELA ENERGIA (H) E PELA AUTOVALOR HELICIDADE (h)

(77)

UNICAMP

$\eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i \hat{p}_i & \phi \\ \phi & \sigma_i \hat{p}_i \end{pmatrix}$ E $\eta^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma_i \hat{p}_i & \phi \\ 0 & \sigma_i \hat{p}_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_j \hat{p}_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \hat{p}_j \end{pmatrix}$

$$\eta^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j \hat{p}_i \hat{p}_j & \phi \\ \phi & \sigma_i \sigma_j \hat{p}_i \hat{p}_j \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \frac{I}{4}$$

PORTANTO η TEM AUTOVALORES $\eta = \pm 1/2$.

PORTANTO OS ESTADOS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DIRAC SE CARACTERIZAM POR,

$|E\eta\rangle$ E PODEMOS TER

$|E>0,\ \eta = 1/2\rangle$

$|E>0,\ \eta = -1/2\rangle$

$|E<0,\ \eta = 1/2\rangle$

$|E<0,\ \eta = -1/2\rangle$

OS ESPINORES UTILIZADOS TODOS, SE E $p = (0, 0, p)$

$$\frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\chi^{(s)} = \frac{1}{2}\sigma_3 \hat{p}_z \chi^{(s)} = \frac{\sigma_3}{2}\chi^{(s)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\chi_s = \lambda \chi_s$$

PORTANTO $\frac{\chi_s^{(1)}}{2} = \lambda^{(s)}\chi_s^{(1)} \quad -\frac{\chi_s^{(2)}}{2} = \lambda^{(s)}\chi_s^{(2)}$

$$\boxed{\lambda^{(1)} = \frac{1}{2} \qquad \lambda^{(2)} = -1/2}$$

TEMOS DOIS ESTADOS $\eta \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases}$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PARA CONSTRUIR O ESPINOR DE HELICIDADE +1/2

DIREÇÃO $p = (p s_\theta, 0, p c_\theta)$

$\vec{p}' = (p s_\theta, 0, p c_\theta)$

$\hat{p}' = \frac{\vec{p}'}{p} = (s_\theta, 0, c_\theta)$

ENTÃO

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \, \chi^{(1)} = \frac{1}{2} \chi^{(1)} = \frac{1}{2} \left\{ p s_\theta \sigma_x + p c_\theta \sigma_z \right\} \chi' = \frac{1}{2} \chi^{(1)}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p c_\theta & p s_\theta \\ p s_\theta & -p c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p s_\theta \\ 0 \\ p c_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a c_\theta + c s_\theta \\ 0 \\ -a s_\theta + c c_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p s_\theta \\ 0 \\ p c_\theta \end{pmatrix}$$

$c = p \quad a = 0$

ENTÃO O VETOR É $\vec{p}' = (p s_\theta, 0, p c_\theta)$ É O VETOR GIRADO DE UM ÂNGULO DO VETOR $\vec{p} = (0, 0, p)$. DITO EM OUTRAS PALAVRAS O ESPINOR $\lambda = 1/2$ DO MOMENTUM $\vec{p}$ É A ROTAÇÃO POR UM ÂNGULO θ DO ESPINOR $\lambda = 1/2$ DE $\vec{p} = p\hat{z}$

SOLUCIONANDO

$$\begin{cases} p c_\theta a + p s_\theta b = a \\ p s_\theta a - p c_\theta b = b \end{cases}$$

$$a = \frac{-p s_\theta b}{p c_\theta - 1} = \frac{-s_\theta b}{-2 s^2_{\theta/2}} = \frac{+2 c_{\theta/2} s_{\theta/2} b}{2 s^2_{\theta/2}}$$

$c_\theta = 1 - 2 s^2_{\theta/2} \quad c_\theta - 1 = -2 s^2_{\theta/2}$

$a = t_{\theta/2} b$

$s_\theta = 2 c_\theta s_\theta \quad s_\theta = 2 s_{\theta/2} c_{\theta/2}$

$$a^2 + b^2 = (t^2_{\theta/2} + 1) b^2 = \frac{b^2}{c^2_{\theta/2}} = 1 \quad b = c_{\theta/2}$$

UNICAMP

ENTÃO

$$\boxed{\chi_{e}^{b1(2)}(\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ \cos\theta/2 \end{pmatrix}}$$

PODEMOS MOSTRAR QUE AS SOLUÇÕES SÃO PARA SPIN 1/2.

TEMOS O MOMENTO ANGULAR $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$.

O HAMILTONIANO H NÃO COMUTA COM L_i

$$[H, L_i] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m, \epsilon_{ijk} r_j p_k]$$

$$[A, BC] = ABC - BCA - BAC + BAC = [A,B]C + B[A,C]$$

NESTE CASO $B = r_j$ $C = p_k$ $A = \alpha_\ell p_\ell$

$$[H, L_i] = \epsilon_{ijk}\alpha_\ell \underbrace{[p_\ell, r_j]}_{-i\delta_{\ell j}} p_k + \epsilon_{ijk}\alpha_\ell r_j \underbrace{[p_k, p_\ell]}_{=0}$$

$$= -i\alpha_\ell \epsilon_{i\ell k} p_k = -i\,\epsilon_{i\ell k}\alpha_\ell p_k = -i(\vec{\alpha}\times\vec{p})$$

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

PORTANTO O MOMENTO ANGULAR NÃO É CONSERVADO.

FAZENDO

$$[H, L_i] = -i [\vec{\alpha} \times \vec{p}]_i$$

SE TIVERMOS UM OUTRO MOMENTO ANGULAR TAL QUE,

$$[H, \vec{\Sigma}] = 2i(\alpha \times \beta)$$

USANDO A EXPRESSÃO DE $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \vec{\sigma} I$

ENTÃO

$$[H, \vec{\Sigma}] = \cancel{[\alpha_i p_i + \beta m]} [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \vec{\sigma} I]$$

$$H = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$[H, \Sigma] = H\Sigma - \Sigma H = \begin{pmatrix} m & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & -m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\sigma_j & \sigma_i \sigma_j p_i \\ \sigma_i \sigma_j p_i & -m\sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m\sigma_j & \sigma_j \sigma_i p_i \\ \sigma_j \sigma_i p_i & -m\sigma_j \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 0 & \underbrace{\{\sigma_i, \sigma_j\}}_{2\delta_{ij}} p_i \\ \underbrace{\{\sigma_i, \sigma_j\}}_{2\delta_{ij}} p_i & \phi \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \phi & p_i(\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) \\ p_i(\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) & \phi \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

PORTANTO

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\sigma_j \sigma_i = \delta_{ij} + i \varepsilon_{jik} \sigma_k = \delta_{ij} - i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad [H, \Sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} p_i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha_k}$$

(81)

UNICAMP

PORTANTO

$$[H, \Sigma_j] = 2i\, \vec{p} \times \vec{\alpha} = 2i(\vec{\alpha} \times \vec{p})$$

E JUNTANDO COM $[H, L_j] = -i[\vec{\alpha} \times \vec{p}]_i$

PORTANTO

$$\boxed{J_j = L_j + \frac{\Sigma_j}{2}}$$

COMUTA COM O HAMILTONIANO.

$$[H, J] = 0$$

EXERCICIO 5.5:

FOR NON-RELATIVISTIC $E \simeq m$ E PORTANTO

$$\boxed{u_B \simeq \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_A}{E + mc^2} \simeq \frac{c\, \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_A}{2mc^2} \simeq \frac{c\, m\, v\, u_A}{mc^2} \simeq \frac{v}{c} u_A}$$

NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

PORTANTO

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \left(\frac{v}{c}\right) u_A \end{pmatrix}$$

PORTANTO AS COMPONENTES u_B SÃO PEQUENAS NO CASO NÃO-RELATIVISTICO, E POR ISTO O SPIN EM MQ NÃO RELATIVISTICA É DADO POR O SPIN UP E SPIN DOWN.

Universidade Estadual de Campinas
Caixa Postal 1170
13100 Campinas SP Brasil

Telefone: PABX (0192) 39-1301
Telex: (019) 1150

ANTIPARTÍCULAS NA EQUAÇÃO DE DIRAC

A SOLUÇÃO $u^{(1,2)}e^{-ipx}$ CORRESPONDE A UM ELETRON DE ENERGIA E E MOMENTO $\vec{p}$. AS OUTRAS DUAS SOLUÇÕES $u^{(3,4)}$ SÃO ASSOCIADAS COM A ANTIPARTÍCULA DO ELETRON, O POSITRON.

PODEMOS VER USANDO A PRESCRIÇÃO DE ANTIPARTÍCULA

POSITRON $E,\vec{p}$ $\quad e^+(E,\vec{p}) \equiv$ ELETRON $e^-(-E,-\vec{p})$.

NESTA LINGUAGEM TEMOS,

$$u^{(3,4)}(-\vec{p})\,e^{-i(-p)x} \equiv v^{(1,2)}(\vec{p})\,e^{ipx}$$

COMO $p^0=E>0$, A NOVA FUNÇÃO v, SÃO O ESPINOR DE POSITRONS.

A EQUAÇÃO QUE DEFINE $u(p)$ É

$$(\not p - m)\,u(p)=0$$

A EQUAÇÃO EQUIVALENTE PARA $v(p)$?

$$(-\not p - m)\,u(-p) = -(\not p + m)\,u(-p) = -(\not p + m)\,v(p)=0$$

com $p^0=E>0$