

PARTÍCULAS ELEMENTARES

— I —

Instituto de Física Teórica/UNESP
(Primeiro semestre de 2014)

Vicente Pleitez

Março – 2014

Conteúdo

1	A FÍSICA DE PARTÍCULAS ELEMENTARES	3
1.1	Quatro interações	3
1.1.1	A Interação Gravitacional	4
1.1.2	A Interação Eletromagnética	7
1.1.3	A Interação Fraca	8
1.1.4	A Interação Forte	9
1.1.5	Quatro Interações?	9
1.2	Onde estamos?	12
1.3	O quê segue?	14
1.4	Unidades Naturais	21
1.5	Exercícios	24
1.6	Referências	25
2	CINEMÁTICA RELATIVÍSTICA	26
2.1	Transformações de Lorentz	27
2.2	Vetores de Lorentz arbitrários	31
2.3	4-vetor de Energia-Momento	34
2.4	Transformações de Lorentz: SL e SCM	37
2.4.1	Caso de um número arbitrário de Partículas	41
2.5	A Seção de Choque	42
2.5.1	Caso da Mecânica Relativística	44
2.6	O Espaço de Fase	47
2.6.1	Caso de 1 Partícula	47
2.6.2	Caso de 2 Partículas	49
2.6.3	Caso de n Partículas	50
2.7	Decaimentos e Colisões em Teoria Quântica de Campos	51
2.7.1	Seção de Choque Invariante	51
2.8	Espaço de Fase Relativístico	55

2.8.1	Integral do Espaço de Fase	57
2.8.2	Estado Final de Duas Partículas	57
2.9	Espalhamento de Duas Partículas	59
2.9.1	Decaimento de uma partícula em duas	62
2.10	Variáveis de Mandelstam	63
2.10.1	Região Física em s, t, u	65
2.11	Crossing no caso mais geral	67
2.12	Exercícios	69
3	SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO	74
3.1	Generalidades	74
3.2	Simetrias Unitárias em Mecânica Quântica	75
3.3	Conservação da Carga Elétrica	77
3.4	O Número Bariônico	80
3.5	O Número Leptônico	83
3.6	Estranheza, Charm, Beleza e Top	87
3.6.1	A Estranheza	88
3.6.2	Cham	90
3.7	Regras de Superseleção	90
3.8	Isospin: Introdução	93
3.9	Simetrias Discretas	95
3.9.1	Números quânticos aditivos e multiplicativos	95
3.9.2	Paridade \mathcal{P}	95
3.9.3	Generalização da Paridade	99
3.10	Determinação do spin dos píons	101
3.11	Paridade Intrínseca	105
3.12	Conjugação da Carga, \mathcal{C}	111
3.13	Inversão Temporal, \mathcal{T}	116
3.14	Violação de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{CP}	119
3.15	Resumo das Simetrias	121
3.16	Exercícios	122
3.17	Referências	124

Capítulo 1

A FÍSICA DE PARTÍCULAS ELEMENTARES

1.1 Quatro interações

A idéia de que a matéria está constituída de elementos básicos imutáveis e com propriedades bem definidas vem da Grécia antiga e atravessa toda a história da Ciência moderna, passando pelo próprio Newton. É claro que nem sempre este conceito ocupou o centro das pesquisas. Mas, no fim do século XIX, físicos e químicos tinham observado vários efeitos que levaria à colocação de paradoxos irresolúveis na física clássica. O *teorema de equi-partição* implica contradições experimentais, pois o calor específico de gases e sólidos decresce com a temperatura, o que não pode ser explicado com a teoria clássica. O mesmo teorema também traz dificuldades quando consideramos a radiação em equilíbrio térmico com a matéria. De fato, no século XIX, o espectro dos elementos químicos estava bem estudado e, depois da descoberta do elétron, este foi considerado o responsável pelo fenômeno de emissão de radiação pela matéria e, em particular, pela separação das linhas espectrais quando um átomo encontra-se num campo magnético (Efeito Zeeman).

Do ponto de vista da ciência moderna podemos considerar o ano de 1808 como o do nascimento do conceito de átomo. Nesse ano, John Dalton publica *A New System of Chemical Philosophy* (Novo Sistema de Filosofia Química), que principalmente explicava as reações químicas. Do ponto de vista da física, a elucidação da estrutura da matéria começou no final do século XIX.

As descobertas que permitiram o início desse estudo foram:

1. Descoberta por W. Röntgen dos raios-X, em 1895.
2. Descoberta por H. Becquerel da radioatividade natural, em 1896.
3. Descoberta do elétron por J. J. Thomson, em 1897.
4. Descoberta do chamado efeito Zeeman por P. Zeeman, em 1897.

É interessante observar que no fenômeno da radioatividade estão presentes três das quatro interações conhecidas até agora, e que serão estudadas neste curso: forte, eletromagnética e fraca. Apenas a gravitação não parece ser relevante neste contexto. A explicação desses fenômenos levaria, décadas depois, à formulação do modelo padrão das partículas elementares e suas interações, denotado aqui apenas como *Modelo Padrão* ou MP.

No começo do século XX, Thomson tinha confirmado que todos os átomos têm elétrons e em 1904 propôs seu modelo atômico. No mesmo ano, H. Nagaoka propõe um modelo de átomo no qual havia um caroço e ao redor dele circulavam os elétrons. Posteriormente, E. Rutherford propõe o modelo atômico com um núcleo central. Segue-se uma quantidade de descobertas teóricas e experimentais que levaram ao quadro da constituição da matéria, o MP, principalmente a partir da década de 1970.

1.1.1 A Interação Gravitacional

A teoria que descreve a interação gravitacional é a *Teoria da Relatividade Geral*, formulada por A. Einstein em 1915. Essa interação é universal no sentido que as fontes da gravidade são a massa, a energia e a pressão, e isso faz com que seja sentida por todas as partículas, mesmo aquelas de massa zero. Porém, nas energias comumente usadas nos laboratórios, a gravidade não tem um papel importante na física de partículas elementares e é fácil verificar o porquê. A interação gravitacional possui uma intensidade dada pela constante de Newton, G_N , com o seguinte valor ¹

$$G_N = 6.6742(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} = 6.7087(10) \times 10^{-39} \hbar c(\text{GeV}/c^2)^{-2}.$$

¹A incerteza a $1-\sigma$ nos últimos dígitos aparece entre os parêntese. Por exemplo, $0.23120(15) = 0.23120 \pm 0.00015$.

Podemos formar uma constante adimensional usando como referência a massa do próton, m_p

$$\frac{G_N m_p^2}{\hbar c} = 4.6 \times 10^{-40} \ll \alpha \approx \frac{1}{137}.$$

A constante de estrutura fina α que aparece do lado direito é uma medida da intensidade da interação eletromagnética, e será definida na próxima seção. Vemos que a intensidade da interação eletromagnética é então aproximadamente 10^{38} vezes maior que a intensidade da interação gravitacional.

Há uma situação, no entanto, na qual esperamos que os efeitos gravitacionais devam ser levados em conta. Isso ocorre quando a energia gravitacional é da mesma ordem da energia de repouso do corpo (no caso uma partícula elementar), ou seja, se

$$\frac{G_N M^2}{l} = M c^2.$$

Quando o comprimento l na equação acima é igual ao comprimento Compton de uma partícula de massa M , $\lambda_C = \hbar/Mc$, temos que

$$\frac{G_N M^2}{\hbar c} = 1,$$

e a massa M que satisfaz esta condição deve ter o valor conhecido como “massa de Planck”

$$M_{\text{Planck}} \equiv M_P = 10^{19} \text{ (GeV}/c^2) \approx 1.78 \times 10^{-5} \text{ g.}$$

Nessas condições espera-se que os efeitos quânticos da gravitação devam ser levados em conta. A escala de energia correspondente $E_P \sim 10^{19}$ GeV. Como referência, a energia disponível nos próximos aceleradores será “apenas” da ordem de $\sim 14 \times 10^3$ GeV.

Na Tabela 1.1 aparecem diversos valores de grandezas na escala de Planck, onde G_N dada anteriormente é a constante de Newton da gravitação e $k_B = 1.380658(12) 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ é a constante de Boltzman.

Em gramas, a massa de Planck tem um valor igual a 1.78×10^{-5} gramas, ou seja, perto de uma dezmilésima parte de um grama. Esse não é um valor exagerado, uma pessoa pode ter uma massa da ordem de 80 kg! Por que então fala-se que “na escala de Planck as leis conhecidas da física falham”? Na verdade, essa afirmação é válida para *densidades de massa* ou de *energia*. Por

comprimento de Planck:	$l_P = (G_N \hbar / c^3)^{\frac{1}{2}}$	$= 1.62 \times 10^{-33}$ cm
tempo de Planck:	$t_P = (G_N \hbar / c^5)^{\frac{1}{2}}$	$= 5.39 \times 10^{-44}$ s
massa de Planck:	$M_P = (\hbar c / G_N)^{\frac{1}{2}}$	$= 2.17 \times 10^{-5}$ g
energia de Planck:	$E_P = (\hbar c^5 / G_N)^{\frac{1}{2}}$	$= 1.22 \times 10^{19}$ GeV
temperatura de Planck:	$T_P = (\hbar c^5 / G_N k_B^2)^{\frac{1}{2}}$	$= 1.42 \times 10^{32}$ K

Tabela 1.1: Escalas de Planck.

exemplo, a massa contida em um volume da ordem de $\lambda_C^3 = l_P^3$ (comprimento Compton) é

$$\rho_P = \frac{M_P}{l_P^3} = \frac{M_P^4 c^3}{h^3} \approx 4.7 \times 10^{93} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad (1.1)$$

onde usamos $l_P = h/M_P c$. Comparemos esta expressão com a densidade de massa de uma partícula como o elétron.

$$\rho_e = \frac{m_e}{(h/m_e c)^3} = \frac{m_e^4 c^3}{h^3} \approx 6.3 \times 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad (1.2)$$

e vemos que

$$\frac{\rho_P}{\rho_e} = \left(\frac{M_P}{m_e} \right)^4 \approx 10^{87}, \quad (1.3)$$

por isso a escala de Planck não é comum no nosso dia-a-dia. Note que em ambos os casos usamos o comprimento Compton para a respectiva massa, M_P e m_e . A densidade de energia num grão de pó ou seja um corpo macroscópico pequeno, de 1 cm de raio, e com uma massa de 10^{-5} g seria $\rho_{\text{macro}} = 10^{-5} \text{ g/cm}^3$, ou seja, $\rho_P / \rho_{\text{macro}} = 4.7 \times 10^{99} \text{ g/cm}^3 \gg 1$.

A gravitação, em condições de laboratórios terrestres, não é sentida de maneira mensurável pelas partículas elementares, ainda que pelo princípio de equivalência sabemos que elas devem senti-la. A força gravitacional da Terra para um nêutron ($R_{\oplus} = 6.4 \times 10^8$ cm) é de $\sim 10^{-21}$ dinas. A força eletrostática entre dois prótons separados a mesma distância é apenas de $\sim 10^{-37}$ dinas. Por que não se manifesta essa força nos laboratórios? A energia para mover 1 cm um nêutron contra o potencial gravitatório da Terra é 10^{-21} ergs, que é também muito pequena. No entanto, para os chamados nêutrons ultrafrios, que têm uma velocidade de cerca de 200 cm por segundo, a respectiva energia cinética é da ordem de 10^{-20} ergs. É por isso que esse tipo de nêutron pode cair sob a influência do campo gravitacional da Terra. Caso os nêutrons tivessem uma velocidade maior, sua energia cinética seria

maior e o efeito gravitacional seria desprezível. Agora imaginem não um nêutron, mas um cristal ou mesmo um fluido num satélite. Os efeitos de uma gravidade menor são cruciais para certos tipos de experimentos, não é à toa que a NASA mantém um ativo programa de microgravidade (ver http://http://www.nasa.gov/mission_pages/station/research/experiments_category.html .) ²

1.1.2 A Interação Eletromagnética

A interação da radiação eletromagnética com a matéria é descrita classicamente pelas equações de Maxwell e quanticamente, mas para energias baixas, pela eletrodinâmica Quântica (QED, pela sigla em inglês). Para energias altas i.e., dezenas de GeVs, temos interação *eletrofraca* do modelo padrão e a QED aparece após a quebra espontânea de simetria que será discutida mais adiante. A interação eletromagnética está caracterizada pela *constante de estrutura fina*, geralmente denotada por α , que mede o deslocamento dos níveis de energia devido à interação spin-órbita nos espectros atômicos. Esta constante é uma das medidas experimentalmente com maior precisão: ³

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03599911(46)}.$$

Exemplos de processos eletromagnéticos são: i) o efeito fotoelétrico, ii) o espalhamento de Rutherford, iii) Bremstrahlung (radiação emitida por partículas carregadas aceleradas ou desaceleradas), iv) produção de pares, v) alguns decaimentos, vi) contribuições às colisões entre partículas, tipo e^+e^- , $p\bar{p}$, pp , e^-p etc.

As interações eletromagnéticas são sentidas pelas partículas carregadas e são mediadas pelo fóton que, no entanto, é neutro (não carrega carga elétrica). A QED constitui o paradigma de uma teoria quântica de campos *renormalizável*, isto é, a amplitude para diferentes processos é bem comportada no sentido que não é divergente a altas energias, mesmo em ordens maiores, na constante de acoplamento, α . No entanto, a renormalização implica que a massa e a carga elétrica são arbitrárias (não calculáveis) e, por

²Um satélite em órbita está sempre caindo e por isso o efeito da força da gravidade é anulado.

³Este valor é para baixas energias, para energias da ordem de 80 GeV temos $\alpha \approx 1/128$. Ver mais adiante a explicação deste fato.

isso, é necessário medir experimentalmente seus valores em uma energia determinada. Ou seja, introduzimos a mão seus valores medidos. No entanto, outras quantidades são preditas, tais como: i) o deslocamento dos níveis de energia atômicos, ii) o momento magnético anômalo dos léptons carregados, principalmente do elétron (no caso do múon parece que pode haver contribuições de uma física nova ainda não detectada diretamente) e, iii) as seções de choque dos diversos processos eletromagnéticos.

1.1.3 A Interação Fraca

A interação fraca foi descoberta em laboratório por H. Becquerel, em 1896, na radioatividade natural, mas somente foi identificada como um novo tipo de interação por Enrico Fermi em 1933. A teoria de Fermi inspirada na QED, com a modificação da violação da paridade, conhecida como *teoria V-A*, descreveu bem os processos fracos até 1974. Nesse ano foram descobertas as *correntes neutras* que não fazem parte da teoria de Fermi ou da V-A. A altas energias, as interações fracas são descritas pelo *modelo eletrofraco* de Glashow-Salam-Weinberg (cuja formulação completa envolveu um número maior de pesquisadores). Ver [Ro02]. Este modelo, como a QED a qual incorpora, é renormalizável. Foram necessários perto de 75 anos para que este modelo surgisse da conjunção dos dados experimentais e de idéias teóricas.

A constante de acoplamento que caracteriza esta interação é a chamada *constante de Fermi*, G_F , que tem um valor de

$$G_F = 1.02 \times 10^{-5} \hbar c \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2 = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2},$$

onde m_p é a massa do próton, e no lado direito colocamos o valor do PDG. Observe que, do mesmo modo que a constante de Newton, a constante de Fermi G_F tem dimensão de inverso de quadrado de energia (em unidades naturais a serem discutidas mais adiante). Em unidades físicas tem a dimensão de (energia) \times (volume).

Essas interações são suficientemente fracas para produzir estados ligados. Apenas induzem decaimentos. Também têm alcance muito curto, da ordem de $\sim 10^{-16}$ cm. Exemplos de processos fracos são:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ e^- + p &\longrightarrow n + \nu_e, \\ \bar{\nu}_e + p &\longrightarrow e^+ + n, \end{aligned} \tag{1.4}$$

o primeiro desses processos é o chamado decaimento- β e será estudado em detalhe mais adiante, os outros são reações entre um elétron e um neutrino com prótons, respectivamente.

Atualmente são conhecidos muitos outros decaimentos envolvendo novas partículas as quais serão introduzidas mais adiante.

1.1.4 A Interação Forte

O nêutron foi descoberto em 1932. Surge então o modelo nuclear composto de prótons e nêutrons que foi se afirmando como a visão correta da constituição do núcleo atômico. Um núcleo típico como o de ^{92}U tem uma dimensão de aproximadamente 10^{-13} cm. O problema da estabilidade do núcleo foi então colocado. Devem existir outras forças de curto alcance. Estas forças são conhecidas como forças nucleares fortes ou apenas interações fortes. A primeira teoria das interações nucleares foi proposta em 1935, por Hideki Yukawa. Essa foi a segunda vez que a interação eletromagnética serviu de exemplo para a construção de teorias para outras interações.

A intensidade da interação forte é dada por uma constante adimensional

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{\hbar c} \simeq 1,$$

e por isso a teoria das perturbações, útil na QED, não é útil aqui (pelo menos a baixas energias). A existência das interações fortes é o fator principal da diversidade de partículas elementares.

Atualmente as interações fortes são descritas pela teoria chamada *Cromodinâmica Quântica* ou QCD pela sigla em inglês. Junto com a parte eletrofraca formam o chamado *Modelo Padrão das interações fundamentais*.

1.1.5 Quatro Interações?

A classificação geral dos estados quânticos identifica dois tipos de estados (no caso partículas). Os *férmions* com spin semi-inteiro e satisfazendo o princípio de exclusão de Pauli, e os *bósons* com spin inteiro e não seguem o princípio de Pauli. Os férmions satisfazem a estatística de Fermi-Dirac e os bósons a estatística de Bose.

Temos agora um conjunto de partículas fundamentais que são como “tijolos” da matéria ordinária e também da matéria em condições reproduzíveis apenas no laboratório, mas que teriam ocorrido no universo primordial. Com

respeito à interação gravitacional, já vimos que seus efeitos são desprezíveis em energias nos laboratórios. No entanto, assume-se que todas as partículas sentem esta interação mesmo que apenas em um caso tenha sido comprovado experimentalmente (ver mais adiante).

Os "tijolos" fundamentais da matéria são férmions e são de dois tipos. Os *léptons* que sentem as interações fraca e eletromagnética, mas não a forte, e os *quarks* que sentem todas as interações. Até distâncias de 10^{-18} cm, léptons e quarks parecem não ter estrutura. Suas propriedades estão resumidas nas Tabelas 1.2 e 1.3, respectivamente.

	$Q/ e $	L	massa (MeV/ c^2)	τ (s)
$\bar{\nu}_e$	0	$L_e = 1$	$< 2 \times 10^{-6}$	estável
e	-1	$L_e = 1$	0.511	estável
ν_μ	0	$L_\mu = 1$	< 0.19	estável
μ^-	-1	$L_\mu = 1$	105.7	2.197×10^{-6}
ν_τ	0	$L_\tau = 1$	< 18.2	estável
τ^-	-1	$L_\tau = 1$	1777	$(290.6 \pm 11.1) \times 10^{-13}$

Tabela 1.2: Carga elétrica em unidades da carga do pósitron, número leptônico, massa e vida média do léptons segundo PDG 2012. Os limites superiores das massas dos neutrinos referem-se às medidas diretas.

Finalmente, os estados bosônicos entram como mediadores de pelo menos três das interações, ou como meio para gerar as massas dos férmions e das partículas mediadoras das interações. Estas últimas são os chamados *bósons de gauge*, e suas características são mostradas na Tabela 1.4.

Devemos distinguir em Física de Partículas as chamadas *Partículas Fundamentais* das *Partículas Elementares*. As primeiras são aquelas mencionadas acima: léptons, quarks e bósons vetoriais e escalares. São eles os graus de liberdade com os quais são construídos os modelos como o próprio MP e são, até as energias obtidas nos laboratórios, partículas puntiformes, i.e., sem estrutura interna. Já as partículas elementares são aquelas que, como o próton e nêutron, têm estrutura interna e são compostos de quarks. Elas são chamadas de *hadrons* e, distinguim-se dos tipos: os *méson*, que são bósons, e os *báron* que são fermions. Mesmo sendo compostas elas são indivisíveis, por isso podemos chamá-las ainda de elementares.

A introdução de números quânticos *aditivos*, como os *números bariônico* e

Quark	I	I_3	s	c	b	t	$Q/ e $	B	massa (MeV/ c^2)
u	1/2	1/2	0	0	0	0	2/3	1/3	1.5 a 4
d	1/2	-1/2	0	0	0	0	-1/3	1/3	4 a 8
s	0	0	-1	0	0	0	-1/3	1/3	80 a 130
c	0	0	0	1	0	0	2/3	1/3	1150 a 1350
b	0	0	0	0	-1	0	-1/3	1/3	4100 a 4400
t	0	0	0	0	0	1	2/3	1/3	173500

Tabela 1.3: Números quânticos dos quarks. $Q/|e|$ é a carga elétrica em unidades da carga do pósitron, e B o número bariônico. I é isospin total e I_3 a sua terceira componente. A massa dos quarks u , d e s refere-se à “massa de corrente”. Para os quarks c e b , a massa e a “massa corredeira” e para o t , a massa “direta” nos eventos observados. Omitimos os erros experimentais. Mais detalhes no PDG 2012.

leptônico, sempre pareceu, como discutiremos mais adiante, *ad hoc*. De fato, não existe nada que garanta a conservação desses números, dado que são simetrias *globais* ou seja, transformam as partículas por uma mesma fase em qualquer lugar do universo. Os grupos relacionados a estas transformações são denotados $U(1)_{B,L}$. E os respectivos números quânticos associados, denotados B e L , respectivamente, não parecem ser consequência de um *princípio fundamental*. Com a formulação do MP, as partículas elementares (quarks e léptons) e suas interações (mediadas por campos de gauge), ficou claro que as conservações de B e $L \equiv \sum L_i$, são *acidentais* ou *automáticas*. Isso significa que a sua conservação não precisa ser imposta, decorre de propriedades mais gerais do modelo, como: i) conteúdo de partículas, ii) invariância de gauge local, iii) invariância de Lorentz, e iv) renormalizabilidade. Assim, hoje em dia ninguém mais imagina que B e L serão sempre conservados. A questão é: qual é a escala de energia em que aparecerão as violações de B e L , ou de combinações $B \pm L$? Por outro lado, esperarmos que existam violações de B e L porque um dos problemas que a física de partículas elementares pretende resolver em colaboração com a cosmologia é: porque no universo observado, a matéria domina sobre a antimatéria, e a violação de B e L é um dos ingredientes para explicar essa assimetria.

Com os “tijolos” fundamentais, quarks e léptons, podemos ter várias interações. Hoje são conhecidas 4 interações na Natureza: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte.

Bósons, (#)	$Q/ e $	Massa GeV/c^2	Simetria
fóton γ (1,2)	0	0	$U(1)_Q$
Glúons G_i (8,16)	cor	0	$SU(3)_C$
W^\pm, Z^0 (3,9)	$\pm, 0$	$\sim 80, 91$	$SU(2)_L \otimes U(1)_Y^{(*)}$

Tabela 1.4: Carga elétrica em unidades da carga do pósitron, massa e a respectiva simetria dos bósons de gauge. O primeiro número entre parêntese indica o número das respectivas partículas, sendo que o segundo número indica os graus de liberdade independentes. O * na última coluna indica que a simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ já foi quebrada para $U(1)_Q$. Para valores mais precisos das massas do W e do Z ver o PDG 2012 [Pdg12].

Como se chegou a este quadro da estrutura microscópica do universo? Parte da resposta a esta pergunta será dada neste curso, mas alguns detalhes técnicos ficam para depois.

O que permite distinguir as diferentes interações são as *vidas médias e seções de choque* com ordens de grandeza bem determinadas. Valores típicos para as interações fortes, fraca e eletromagnética são mostrados na tabela 1.5. ⁴

É interessante observar que não todas as partículas sentem todas as interações. Por exemplo os hádrons sentem as quatro forças, os léptons carregados sentem três, os neutrinos apenas duas. Seria possível que existissem partículas que sentissem apenas um força? seria a gravitacional. O resumo disso está na Tabela 1.6. Mais detalhes sobre os Least Interacting Particles (LIPS) ⁵.

1.2 Onde estamos?

Em 1979, S. L. Glashow, A. Salam, e S. Weinberg ganharam o Prêmio Nobel de Física pela proposta nos anos 60 do modelo que descreve a interação

⁴No entanto, a descoberta de quark top com uma massa muito acima do esperado implica que a vida média de processos envolvendo este quark e mediados pelas interações fracas podem ter uma vida média da ordem dos 10^{-23} s, que é um tempo característico das interações fortes.

⁵Ver em G. Matsas *et al*, *Dark matter: The Top of the iceberg?*, hep-ph/9810456.

Interação	Alcance	τ (s)	σ (mb)	α
Forte	1 fm $\sim 1/m_\pi$ confinado	10^{-23} s $\Delta \rightarrow \pi pp$	10	1
Eletromagnética	∞	$10^{-20} - 10^{-16}$ $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ $\Sigma \rightarrow \Lambda\gamma$	10^{-3}	10^{-2}
Fraca	10^{-3} fm $\sim 1/M_W$ $M_W \sim 100m_p$	$> 10^{-12}$ $\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$ $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}$ $\nu p \rightarrow \nu p$ $\nu p \rightarrow \mu^- p\pi^+$	10^{-11}	10^{-5}

Tabela 1.5: Números característicos das quatro interações.

Interação	quarks	léptons carregados	neutrinos	LIPS
Gravitacional	sim	sim	sim	sim
Fraca	sim	sim	sim	no
Eletromagnética	sim	sim	no	no
Forte	sim	no	no	no

Tabela 1.6: Tipos de partículas según suas interações.

eletrofraca de léptons (os quarks seriam incorporados depois). O modelo tinha sido proposto por Glashow em 1961 e Weinberg e Salam intruziram nele o *mecanismo de Higgs*, ou quebra *espontânea de simetria*. Em 1999 seria a vez de M. Veltman e G. 't Hooft de ganhar o prêmio, pela demonstração, em 1972, que o modelo eletrofraco de Glashow-Salam-Weinberg é uma teoria renormalizável. No começo da década de 1980, uma teoria não-Abeliana para a interação forte foi, ainda que de maneira indireta, confirmada pelas experiências em altas energias. Essa teoria é a chamada *Cromodinâmica Quântica* (QCD). Em 2004, F. Wilczek, D. Gross e D. Politzer ganharam o Prêmio Nobel de Física pela descoberta, feita em 1972, do fato de que a QCD tinha a propriedade de *liberdade assintótica*: as interações fortes são menos fortes em energias altas. Em 2013 Peter Higgs e Robert Brout ganharam o prêmio Nobel pela descoberta do mecanismo de quebra espontânea de simetria que implica na existência de um campo escalar neutro descoberto em 2012 no CERN pelas colaborações ATLAS e CMS (ver mais adiante).

Esse é então o chamado *Modelo Padrão* das partículas elementares, que está baseado nas simetrias de gauge $SU(3)_C \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$, onde o primeiro fator é a simetria da QCD e os dois últimos correspondem à interação eletrofraca. Após a quebra espontânea de simetria temos que $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$ e ocorre a separação entre a interação fraca, $V-A$, e a QED em energias baixas. No entanto, dizer qual é a simetria não é suficiente para determinar um modelo. É preciso dizer em quais representações do grupo de simetria estão organizadas os graus de liberdade (partículas de matéria). No caso do MP, os férmions de mão esquerda aparecem em doubletos de $SU(2)_L$ (isso explica o “ L ” no grupo $SU(2)$) e os de mão direita em singletos de $SU(2)$, em ambos caso os fermions carregam o número quântico aditivo da hipercarga fraca, Y . A diferença nas representações de férmions de mão esquerda e direita permite que o modelo acomode a violação da paridade nas interações fracas. Mas não a explica. Além de todas as partículas do MP terem sido observadas experimentalmente, todos os números quânticos foram medidos confirmando o conteúdo de representação do modelo.

O Modelo Padrão constitui a fronteira do nosso conhecimento do mundo subnuclear e tem atingido um grau de concordância com os dados experimentais apenas superado, por enquanto, pela QED. Todas as previsões do modelo têm sido confirmadas pelos experimentos, a última delas foi a descoberta do bóson de Higgs no LHC do CERN. De fato, em julho de 2012 as colaborações ATLAS e CMS ambas usando o colisor de pp LHC situado no CERN descobriram uma ressonância com uma massa de perto de 125 GeV. Esta partícula é consistente com um bóson scalar com $J^P = 0^+$ e seus acoplamentos com os quarks, léptons e bósons de gauge compatíveis com as do bóson de Higgs do MP. No setor dos léptons houve muitos avanços nas últimas décadas. O três léptons carregados estão bem estudados e a universalidade de suas interações bem estabelecida dentro dos erros experimentais (ver no entanto o problema do momento magnético do múon).

Por outro lado, o MP não pode ser a teoria final. Há claras evidências que ele não é completo. Ver discussão na próxima seção.

1.3 O quê segue?

O modelo padrão está em acordo com a maioria das medidas experimentais. Por outras palavras, as medidas concordam com as previsões teóricas do modelo quando correções quânticas são levadas em conta. Mas existem

evidências de efeitos que não podem ser explicados no contexto do modelo e que por isso são considerados como evidência de que deve existir uma física nova além do modelo.

Essas evidências podem ser classificadas em três tipos, dependendo da área em que são feitas as observações: 1) na física de partículas elementares, 2) observações astrofísica e/ou cosmológicas, e 3) de caráter estético.⁶

E física de partículas existe apenas uma clara evidência experimental que não se encaixa no MP: os neutrino têm massa. No modelo, os neutrinos são partículas com massa zero por duas razões:

1. Não são introduzidos *neutrinos de mão direita*, ou seja, o modelo incorpora apenas *neutrinos de mão esquerda*.
2. O *número leptônico total*, L , e os de família são conservado automaticamente. Ou seja que como mencionado na Sec. 1.1.5 sua conservação é uma consequência de princípios fundamenatais:
 - (a) Invariância de Lorentz, o modelo é relativístico
 - (b) Conteúdo de representação ou de partículas: aquelas partículas discutidas acima sem neutrinos de mão direita.
 - (c) Simetria de gauge local dada por $SU(3)_c \otimes U(1)_L \otimes U(1)_Y$
 - (d) Renormalizabilidade: previsões teóricas dão resultados finitos

Nesse contexto, os neutrinos têm massa nula em qualquer ordem em teoria de perturbação no contexto do MP.

Tudo isto parecia consistentes com todos os dados da física nuclear (decaimentos- β) e os processos fracos semileptônicos de hádrons. Na verdade seria necessário um novo tipo de experimentos para poder detectar a massa dos neutrinos. Na década dos sessenta, Raymond Davis começou a medir o número de neutrinos que chegam à Terra produzidos no Sol por reações termonucleares. Na época, já existiam modelos para a evolução das estrelas. Em particular do Sol. O teórico John Bahcall calculou o número de neutrinos que seriam emitidos nas reações nucleares no Sol e os primeiros resultados já eram consistentes com apenas algo em torno de 30% do esperado. Agora sabemos que pelo menos dois deles tem massas diferentes de zero e que se misturam entre si produzindo o fenômeno quântico chamado de *oscilação*

⁶S. Troitsky, *Unsolved problems in particle physics*, Physics – Uspekhi **55(1)**, 72 (2012).

de neutrinos, verificado vários experimentos que observam neutrino que chegam do Sol, nos produzidos na atmosfera pelos raios cósmicos e, em aqueles produzidos em reatores e aceleradores.

Pórem, existem outras questões dentro da área de partículas elementares que sugerem que o MP é incompleto. Vejamos.

1. O modelo tem 19 parâmetros (mesmo com neutrinos de massa zero): três acoplamentos de gauge g_1, g_2, g_3 correspondentes aos fatores $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ e $SU(3)_C$; nove massas $m_e, m_\mu, m_\tau, m_u, m_d, m_c, m_s$ e m_t, m_b ; três ângulos de mistura na matriz de CKM $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ e uma fase δ , o parâmetro Θ da QCD e, finalmente no setor escalar o acoplamento quártico entre o escalar de Higgs, λ , e a massa do Higgs m_H . Todos eles são parâmetros livres, devem ser medidos experimentalmente.
2. O problema dos sabores. O MP acomoda as massas e ângulos de mistura de quarks e léptons (com certa sutileza no caso das massas dos neutrinos). Todos esses parâmetros que devem ser medidos experimentalmente. O MP não explica porque esses parâmetros têm os valores medidos. Por exemplo, porquê as massas aumentam da primeira até a terceira geração?
3. Os neutrinos são férmions de Dirac ou de Majorana? Quando os neutrinos ganham massa eles podem ser de dois tipos de campos: de Dirac (quatro componentes) ou Majorana (duas componentes): um campo de Dirac tem os seguintes graus de liberdade: $\nu_L, \nu_R, \nu_L^c, \nu_R^c$ onde ν^c está relacionada com a antipartícula de ν . No caso de um campo de Majorana teríamos os graus de liberdade ν_L, ν_R . A questão seria resolvida se fosse observado o chamado duplo decaimento beta sem neutrinos $(\beta\beta)_{0\nu}$. Vários experimentos no mundo estão na sua procura.
4. Um sistema não degenerado, como é o caso das partículas elementares não podem ter momentos de dipolo elétrico (EDM pela sigla em Inglês) se as simetrias discretas T (inversão temporal) e P (inversão espacial) são conservadas. Em teoria quântica de campos existe um teorema que diz que qualquer densidade lagrangeana que satisfaça princípios gerais como: a invariância relativística, a relação spin-estatística, a localidade e unitariedade, é invariante pelas transformações CPT (em qualquer ordem). Como CP é violada no MP esperamos que partículas elementares como o nêutron ou fundamentais como quarks e léptons carregados tenham um EDM diferente de zero. De fato, isso ocorre no MP,

partículas como o nêutron e o elétron têm um EDM não nulo. Mas, é muito pequeno $d_n \sim 10^{-32}$ e cm e $d_e \leq 10^{-38}$ e cm. As medidas experimentais ainda não foram capazes de medir um EDM como esses mas colocam vínculos: $|d_n| < 3 \times 10^{-26}$ e cm, e $|d_e| < 1.6 \times 10^{-27}$ e cm. Experimentos futuros esperam melhorar a sensibilidade em um ou dois ordens de grandeza. Assim, se um EDM no intervalo $10^{-26} - 10^{-28}$ for medido essa será uma evidência indiscutível da existência de física além do MP. Para termos uma idéia do valor pequeno de um EDM podemos dar seu valor em termos de um magneton de Bohr. Ele é $d_e < 8.3 \times 10^{-17} \mu_B$, e lembremos que o momento magnético do elétron (a quantidade medida com maior precisão na física) é da ordem de $2\mu_B$.

5. O MP acomoda mas não explica a violação da paridade.

Há questões astrofísicas e cosmológicas sem resposta no contexto do MP:

1. A matéria escura. Observações astronômicas de vários tipos revelam que existe matéria que não emite luz. Esta é uma questão interessante para a física de partículas elementares porque existem vários candidatos em modelos além do MP como os que serão considerados embaixo. Nesse caso eles poderiam ser detectados em laboratórios. Mas, uma possibilidade seria a existência dos LIPS considerados na Sec. 1.1.
2. Assimetria matéria-antimatéria: Observações astronômicas mostram que no universo observado existe apenas matéria. A antimatéria ocorre apenas em processos estelares ou na atmosfera terrestre. Ou seja, não existem (pelo menos não são observadas) estrelas formadas de antimatéria. Como no modelo padrão do universo (Big Bang) a antimatéria deve ter sido produzida em igual quantidade que a matéria (o número bariônico é conservado) precisamos explicar como aparece a assimetria observada. O que se sabe é que qualquer teoria que explique essa predominância de matéria deve incluir os seguintes ingredientes: novas fontes de violação de CP, violação do número bariônico, B , e um universo fora do equilíbrio na época em que a assimetria é gerada.
3. Em 1998 foi observado que o universo está sendo acelerado, uma possibilidade é que seja uma constante cosmológica (que Einstein introduziu e depois descartou). Ainda não existe uma solução a este problema no contexto da física de partículas. Todas as propostas até agora usam

campos com propriedades que dificilmente serão detectados nos laboratórios terrestres.

Existem também problemas estéticos. Ou seja questões que não são problemas para calcular os observáveis do MP mas que, pelos critérios dos físicos, deveriam ter uma explicação *natural* no contexto de uma teoria que vai mais além do MP.

1. Cada interação tem sua escala de energia ou massa característica. Para as interações fortes é dada pela constante Λ_{QCD} que é aquela quando o acoplamento da QCD é forte. A escala eletrofraca é da ordem de $v \approx 246$ GeV que determina a massa do W^\pm e do Z . Para a gravitação a escala é a de Planck, $\sim 10^{19}$ GeV. Existem propostas teóricas para novas escalas de energia, por exemplo a escalar de Peccei-Quinn $M_{PQ} \sim 10^{12}$ GeV, do mecanismo de geração de massa para os neutrinos, $M_R \sim 10^{12}$ GeV, e de grande unificação $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. Todas elas tem a seguinte hierarquia $\Lambda_{QCD}, v \ll M_R \sim M_{PQ}, < M_{GUT} < M_P$. Esta desproporção das escalas é conhecido como o *o problema da hierarquia de gauge*. Existirá um deserto (ou seja nenhuma física nova) entre as escala dos interações fracas e a de Planck)?
2. A massa do escalar de Higgs recebe contribuições de correções quânticas $m_H^2|_F = m_H^2 + c\Lambda^2$, onde Λ é a escala de energia (cut off ultravioleta) onde o MP deixaria de ser válido, e c é um número ~ -0.1 no MP. Se não existir física nova até a escala de Planck, então $\Lambda = M_P$ como $m_H^2|_F = 125 \text{ GeV}^2$, e $c\Lambda^2 \sim 10^{33}v^2 \text{ GeV}^2$ deve haver um ajuste fino entre m_H^2 e $c\Lambda^2$ para dar como resultado $m_H^2|_F = (125 \text{ GeV})^2$ deve haver um cancelamento da ordem de 10^{-33} em cada ordem de teoria de perturbação. Esperaríamos que $c\Lambda^2 \sim v^2$ mas, qual seria a física nova nessa escala?

Além desse modelo, existem apenas especulações, umas mais interessantes que outras. Sem ser exaustivos colocamos as seguintes possibilidades:

Além do MP

1. Modelos Multi-Higgs
A partícula descoberta no CERN em julho de 2012 é consistente com um bóson de spino 0. Mas, ainda não é possível dizer se existe apenas uma partícula desse tipo, como seria o caso no MP. Assim as extensões mais imediatas do modelo é considerar que a simetria de gauge

é a mesma que a do MP mas assumir a existência de mais campos escalares nas representações mais simples de $SU(2)$: singletos, dubletos e tripletos, e estudar os seus impactos nos diferentes observáveis medidos experimentalmente de baixas e altas energias.

2. Simetrias de gauge maiores

A simetria de gauge do MP é $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, mas esta simetria poderia ser subgrupo de outra maior, por exemplo $SU(3)^3$, $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, etc. Nestes casos deveriam existir mais bósons de gauge e também mais escalares.

3. Teorias de Grande Unificação (GUT)

Uma possibilidade interessante é que a simetria de gauge do MP seja subconjunto de uma simetria maior relacionada a um grupo semi-simples. Um exemplo desta situação é a teoria de grande unificação baseada na simetria $SU(5)$. No entanto, como veremos mais adiante, as coisas não estão boas para esta teoria do ponto de vista experimental e, podemos dizer, que sua versão mínima já foi descartada pelos dados experimentais como a não observação do decaimento do próton.

4. Supersimetria

Por muito tempo se pensou que as simetrias espaço-temporais (grupo de Poincaré) não se misturam com as simetrias internas. No início dos anos 70 foi mostrado que sim existe essa possibilidade mas o preço a pagar é que existem transformações do tipo fermions \leftrightarrow bósons. Não é isso o que se observa, pelo menos em energias baixas. Por motivos que serão discutidos mais adiante, é possível construir uma versão supersimétrica do MP. Para isso é necessário duplicar o número de partículas fundamentais: quarks (q) de spin $1/2 \leftrightarrow$ squarks \tilde{q} de spin 0, leptons (l) de spin $1/2 \leftrightarrow$ sleptons \tilde{l} de spin 0, W^\pm de spin 1 \leftrightarrow winos \tilde{W}^\pm de spin 0, Z de spin 1 \leftrightarrow zino \tilde{Z} de spin 0, fóton γ de spin 1 \leftrightarrow fotino $\tilde{\gamma}$ de spin 0, gluons G de spin 1 \leftrightarrow gluinos \tilde{G} de spin 0, e finalmente o Higgs H^0 de spin 0 \leftrightarrow Higgsino \tilde{H}^0 de spin $1/2$.

5. Teoria de Supercordas

É a única alternativa para a unificação das quatro interações. Abandona a teoria quântica de campos locais com excitações (partículas) pontiformes, por objetos multi-dimensionais. Precisa de 10 ou 11 dimensões e supersimetria para ser formulada. Tem problemas teóricos

e nenhuma predição experimental.

Na primeira parte das presentes notas, vamos considerar a física das partículas elementares antes do estabelecimento do modelo padrão. Alguns dos resultados foram incorporados no modelo, como por exemplo a violação da paridade, mas não são explicados por ele. Isto é, estudaremos primeiro a física “independente do modelo”, explorando apenas a cinemática, simetrias e leis de conservação. Mas vamos colocar sempre que possível como esse conhecimento foi incorporado do modelo padrão. Começemos com a cinemática.

1.4 Unidades Naturais

O Volt é definido como

$$1 \text{ V} \equiv 1 \frac{\text{J}}{\text{C}},$$

ou seja um Joule por Coulomb. Podemos escrever também

$$1 \text{ J} = 1 \text{ V} \times 1 \text{ C} \frac{e}{1.602 \times 10^{-19} \text{C}},$$

ou, finalmente

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Na física de partículas elementares aparecem freqüentemente duas constantes ditas fundamentais: \hbar , a constante de Planck h dividida por 2π , e c , a velocidade da luz no vácuo. Os valores são: ⁷

$$\begin{aligned} \hbar &\equiv h/2\pi = 1.0545887(57) \times 10^{-27} \text{ erg s}, \\ c &= 299792458 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

As unidades dessas constantes são: $[\hbar] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$, e $[c] = \text{LT}^{-1}$. Em “unidades naturais”, \hbar é igual a uma unidade de ação e c é igual a uma unidade de velocidade:

$$\hbar = c = 1.$$

O sistema estará completamente determinado se especificarmos a unidade de energia (ML^2T^{-2}) em $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$, ou $\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$.

$$\begin{array}{ll} \text{massa: } m & \text{comprimento: } (1/m)(\hbar c/c^2) \\ \text{momento: } m(c) & \text{tempo: } (1/m)(\hbar/c^2) \\ \text{energia: } m(c^2) & \end{array}$$

Os seguintes dados são de utilidade:

$$\begin{aligned} 1 \text{ MeV} &= 1.6021892(46) \times 10^{-6} \text{ erg}, \\ 1 \text{ GeV}/c^2 &= 1.78 \times 10^{-24} \text{ g}, \\ 1 \text{ erg} &= 6.242 \times 10^5 \text{ MeV}, \\ &= 6.242 \times 10^{11} \text{ eV}, \\ \hbar c &= 1.9732858(51) \times 10^{-11} \text{ MeV cm} \end{aligned}$$

⁷Note-se que o valor de c não tem mais erro, essa é uma convenção .

$$\begin{aligned}
&= 197.32858(51) \text{ MeV fermi} \\
&= 1.9732858(51) \times 10^{-16} \text{ GeV m} \\
1 \text{ metro} &= 5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1}, \\
1 \text{ fermi} &= 10^{-13} \text{ cm} = 5.07 \text{ GeV}^{-1}, \\
1 \text{ s} &= 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1}, \\
e &= \sqrt{4\pi\alpha} \text{ (sem dimensão em unidades naturais)} \\
[e] &= [(\hbar c)^{\frac{1}{2}}] \text{ (no sistema racionalizado de Heaviside-Lorentz)} \\
e|_{\text{Heaviside-Lorentz}} &= \sqrt{4\pi} e|_{\text{Gaussiano}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} e|_{\text{Sistema Internacional}}.
\end{aligned}$$

As seções de choque usualmente são expressas em *milibarns* (mb),

$$1 \text{ mb} = 10^{-3} \text{ b} = 10^{-27} \text{ cm}^2,$$

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mb}.$$

A constante de estrutura fina α é definida como a razão da energia eletrostática de repulsão entre dois elétrons, a distância de um comprimento Compton um do outro, com respeito à energia em repouso do elétron:

$$\alpha = \frac{e^2/(\hbar/mc)}{mc^2} = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}.$$

O *alcance* de uma força é uma consequência do princípio de incerteza de Heisenberg: Para medir a energia com precisão é necessário um tempo longo de observação,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2.$$

Isso implica que uma flutuação da energia de uma partícula não é observável se ocorre num intervalo de tempo suficientemente pequeno,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\Delta E}.$$

Por exemplo, uma partícula pode dar emprestado uma energia ao fóton sempre que o Δt seja restringido como na expressão acima. A máxima distância que o fóton pode viajar com essa energia “emprestada” é R

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{2\Delta E},$$

e como um fóton de comprimento de onda λ satisfaz

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$$

temos que neste caso

$$R = \frac{\lambda}{4\pi}.$$

Por outro lado, se a partícula tem massa diferente de zero $\Delta E = mc^2$ e temos

$$R = \frac{\hbar c}{2mc^2} \approx 10^{-18} \text{ m}$$

se $m = 100 \text{ GeV}$, que é mais ou menos o alcance da força fraca.

1.5 Exercícios

Para os valores numéricos das diferentes constantes, h, c, m_e etc, usar os valores do PDG 2012 (disponível também em <http://pdg.lbl.gov>.)

1. Encontre em unidades naturais, o comprimento e tempo correspondentes a 1/gramma.
2. Verifique os fatores de equivalência

$$1 \text{ GeV} = 1.7827 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\frac{1}{\text{GeV}} = 0.19733 \times 10^{-15} \text{ m} = 6.5822 \times 10^{-25} \text{ s}$$

3. Calcule a energia equivalente às massas do próton e do elétron em MeV.

$$m_p = 1.672 \times 10^{-24} \text{ g} \quad , \quad m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$$

4. Calcule a energia total de um próton que viaja a 0.8 c.
5. Calcule velocidade, momento e comprimento de onda para elétrons de 20 GeV.
6. Encontre no sistema de unidades naturais (i) as dimensões da carga elétrica.
7. Verifique que

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \Big|_{SI} = \frac{e^2}{\hbar c} \Big|_{cgs} \approx \frac{1}{137}$$

onde os subscritos representam o sistema de unidades utilizado, o Sistema Internacional (*SI*) ou o cgs.

8. encontre a dimensão de \vec{E} e \vec{B} no sistema de unidades naturais. Mostre que a ação eletromagnética é adimensional nessas unidades.

1.6 Referências

1. H. Frauenfelder e E.M. Henley, *Subatomic Physics*, Prentice Hall, 2ª edição, 1991.
2. D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley, New York, 1987. 2a. Edição 2008.
3. I. S. Hughes, *Elementary Particles*, 3ª Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
4. B. R. Martin, *Nuclear and Particle Physics: An introduction*, Wiley (2009), 2a. Ed.
5. B. R. Martin e G. Shaw, *Particle Physics*, John Wiley, 1992. 972.
6. D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, 4ª Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Capítulo 2

CINEMÁTICA RELATIVÍSTICA

Na maioria dos casos, seja nos laboratórios ou no universo afora, a velocidade das partículas elementares é frequentemente *quase* a velocidade da luz no vácuo. A maioria é instável, com vidas médias que variam de minutos até 10^{-23} segundos! Como é possível “medir” as propriedades de tais partículas? Afinal, sabemos que as partículas elementares não têm sido apenas “pesadas” mas também “classificadas” em diferentes espécies, e até sabemos com qual frequência umas se transformam nas outras. O objetivo dos Caps. 2- 8 é mostrar como isso é feito, mas vamos nos colocar numa situação em que as dificuldades experimentais já acabaram e as teóricas ainda não começaram. Ou seja, vamos considerar muitas das leis e propriedades das partículas elementares que não dependem da dinâmica subjacente, ou como diz-se hoje em dia, independente de um modelo mais fundamental. As propriedades discutidas aqui deverão ser válidas quando for proposto um modelo da dinâmica das interações (o modelo padrão). De fato algumas delas, como as simetrias globais, aparecem de maneira automática (como já foi discutido no Cap. 1).

A *cinemática relativística* é uma ferramenta essencial no estudo das propriedades das partículas elementares. Ela permite que partículas sem carga elétrica, e que por isso não podem ser registradas em qualquer detector, possam ser reconhecidas. Por outro lado, nenhum tipo de relógio pode medir tempos menores que 10^{-18} segundos diretamente mas, estudando a cinemática é possível fazê-lo até 10^{-23} segundos. De fato, com exceção do próton, do elétron e de outros mésons carregados, a maioria das partículas elementares foi descoberta fazendo cálculos cinemáticos e comparando-os com

os dados experimentais. A cinemática completa aquilo que é visto nos experimentos. É claro que nem tudo é cinemática, existe toda uma parte experimental com suas técnicas sofisticadas, processamento de dados etc. Também temos a dinâmica procurada pelos físicos teóricos, agora bem descrita no MP. Os processos que estudaremos nesse capítulo são de dois tipos:

- Uma partícula elementar transforma-se em outras,

$$A \rightarrow B + C + D + \dots$$

- Duas partículas elementares colidem e originam duas ou mais partículas elementares, sendo que duas destas podem, ou não, ser iguais às duas incidentes.

$$A + B \rightarrow C + D + \dots$$

Experimentalmente registra-se o que colidiu e o que foi produzido, muitas vezes através dos seus produtos de decaimento dos últimos. Mede-se, por exemplo, a direção e o momento das partículas, a taxa de produção etc. O problema de obter uma dinâmica que descreva as interações entre partículas elementares fica mais complicado que no caso de processos similares em mecânica clássica ou mesmo em mecânica quântica não relativista porque, segundo a teoria quântica de campos, formalismo usado na física de partículas elementares, temos que as partículas podem ser criadas ou destruídas, e que existem *partículas virtuais* que não conservam a energia-momento, i.e., $p^2 \neq m^2c^2$ para o caso de partículas com massa; ou $p^2 \neq 0$ para partículas sem massa como o fóton.

2.1 Transformações de Lorentz

Como dissemos acima, usualmente as partículas têm velocidades perto da velocidade da luz.¹ Por isso temos que usar a relatividade restrita para descrever a cinemática de uma colisão. Nesse contexto, devemos considerar as transformações de Lorentz entre dois observadores com velocidade relativa

¹Mesmo quando isso não acontece como no caso da Física Nuclear onde, devido a que as partículas tem baixas energias, podemos usar a cinemática não relativística, ainda assim é preciso considerar a relatividade especial porque os processo nucleares são uma consequencia da lei $E_0 = mc^2$.

constante, \vec{v} , e cada um em repouso com os respectivos sistemas de coordenadas S e S' , respectivamente.² É suficiente para os nossos propósitos [Na89] apenas o caso em que a velocidade tem a direção do eixo- x no sentido positivo, i.e., $x > 0$. É a chamada *configuração padrão*. Assim, as transformações entre os dois sistemas de coordenadas S' e S , (ct', x', y', z') e $(x^0 = ct, x, y, z)$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(v)(ct - \beta_v x), \\ x' &= \gamma(v)(x - \beta_v ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

$$\beta_v \equiv \frac{v}{c} \leq 1, \quad \gamma(v) \equiv (1 - \beta_v^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 1, \quad (2.2)$$

e c , como usual, é a velocidade da luz no vácuo. Em forma matricial a (2.1) escreve-se

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta_v \gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta_v \gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Quando a velocidade que aparece no fator γ na Eq. (2.2) for a velocidade relativa entre dois observadores inerciais movendo-se ao longo do eixo- x , v , podemos escrever simplesmente γ e $\beta = v/c$.

As transformações de Lorentz inversas são obtidas fazendo a substituição $t', x', y', z' \rightarrow t, x, y, z$, e $\beta \rightarrow -\beta$.

Acima introduzimos o 4-vetor contravariante

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

²Não pretendemos fazer aqui um tratamento detalhado da relatividade restrita, para isso pode-se consultar o livro de J.D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, Cap. 11, 3a. Edição, 1998, e as referências ali citadas. Pode-se usar a 2a edição do livro também. Vale a pena estudar o clássico livro de Landau e Lifshitz [La89]. Na teoria da relatividade especial (TRE) os sistemas de referência são *inerciais*. Sem entrar em detalhes assumimos que o sistema das estrelas fixas é o sistema inercial de referência no qual as medidas de tempo e distância de um *evento* (um ponto do espaço-tempo) pode ser descrito em coordenadas cartesianas. Livros mais especializados como o de Rindler, devem ser estudados também [Ri01, ST04].

onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Usaremos também a forma seguinte para um 4-vetor

$$x = (x^\mu) = (ct, \vec{r}). \quad (2.5)$$

onde definimos o produto escalar entre o vetor x com ele mesmo como

$$(x \cdot x) = x \eta x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - (\vec{r})^2, \quad (2.6)$$

Definimos o tensor métrico

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A diferença finita de coordenadas entre dois eventos $t^1 - t^2$, $x^1 - x^2$, $y^1 - y^2$ e $z^1 - z^2$ é

$$\Delta x = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta \vec{r} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

temos que

$$(\Delta x, \Delta x) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2. \quad (2.9)$$

Este é um invariante sob as transformações em (2.3). Quando em forma diferencial $(dx, dx) \equiv (ds)^2$ é chamado *intervalo*. O inverso do tenso métrico η^{-1} é definido como

$$\eta^{\mu\nu} (\eta^{-1})_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu, \quad (2.10)$$

onde

$$\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Esta igualdade entre η e η^{-1} é válida apenas em coordenadas cartesianas.

Com o tensor métrico podemos baixar índice de 4-vetores

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} ct \\ -\vec{r} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

ou, subir índice $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$. O 4-vetor em (2.12) é chamado de 4-vetor *covariante* e podemos escrev-lo também, em analogia com (2.5), como

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}). \quad (2.13)$$

Assumimos que uma partícula elementar é aproximadamente uma partícula clássica pontual geralmente de massa m . A posição e o tempo no espaço de Minkowski, $\vec{r}(t)$ e t ($-\infty < t < \infty$) define uma *linha de mundo* da partícula parametrizada assim

$$x(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}(t) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

O *tempo próprio*, denotado τ , é o medido por um relógio que se move com a partícula. Seja S' o referencial inercial que se move com a partícula, ou seja um referencial no qual a partícula se encontra em repouso. Neste caso temos, em forma infinitesimal

$$dx' = \begin{pmatrix} cd\tau \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

O intervalo neste caso

$$\begin{aligned} (dx')^2 &= c^2(d\tau)^2 \\ &= (dx)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{r}(t))^2 \\ &\Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{v}^2(t)/c^2} = dt \gamma(\beta_v) \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Ou integrando

$$\tau = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{1 - \beta_v^2(t')},$$

obtemos a relação entre o tempo próprio τ e t ao longo de uma linha de mundo da partícula finita. Aqui t_0 pode ser escolhido livremente.

Em intervalos finitos podemos resumir as consequências mais importante da relatividade especial assim: ³ i) a contração das distâncias,

$$\Delta x' = \gamma \Delta x \geq \Delta x,$$

e ii) a dilatação do tempo,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \geq \Delta t'$$

Um exemplo no qual se verifica a dilatação do tempo é o decaimento do múon- μ^- . Ele tem uma vida média $\tau_\mu = 2.26 \times 10^{-6}$ segundos no sistema

³Mais detalhes nos livros de relatividade como [La89, Ri01, ST04].

de repouso do próprio múon. Mesmo que o múon viajasse com a velocidade da luz, seu caminho livre médio, l , seria $l = c\tau_\mu = 6.78 \times 10^4 \text{ cm} \simeq 700 \text{ m}$. No entanto, experiências com balões indicam uma penetrabilidade média na atmosfera terrestre de 30 km. Isso implicaria uma vida média de perto de 10^{-4} segundos. A dilatação do tempo da relatividade restrita está em acordo com esses dados.

2.2 Vetores de Lorentz arbitrários

Qualquer objeto que se transforme como na x^μ (ver 2.17 embaixo) diz-se que é um 4-vetor contravariante de Lorentz. Isto é, se $a = (a^0, \vec{a})$ é um 4-vetor arbitrário, suas componentes se transformam como na Eq. (2.1):

$$\begin{aligned} a'^0 &= \gamma(a^0 - \beta a^1), \\ a'^1 &= \gamma(a^1 - \beta a^0), \\ a'^2 &= a^2, \\ a'^3 &= a^3. \end{aligned} \tag{2.17}$$

ou como na forma matricial Eq. (2.3)

$$\begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_v \gamma & 0 & 0 \\ -\beta_v \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

As transformações inversas podem ser obtidas das (2.17) trocando as primas e fazendo $\beta \rightarrow -\beta$, [da mesma maneira que em (2.1)]:

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma(a'^0 + \beta_v a'^1) \\ a^1 &= \gamma(a'^1 + \beta_v a'^0) \\ a^2 &= a'^2 \\ a^3 &= a'^3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Definimos o produto escalar entre dois 4-vetores a e b assim:

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (2.21)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Um 4-vetor a pertence a um dos tipos seguintes:

- tipo-tempo, $a^2 > 0$,
- tipo-luz, $a^2 = 0$,
- tipo-espaço, $a^2 < 0$,
- zero, $a = 0$.

Por simplicidade assumimos que a componente temporal de um vetor tipo-tempo ou tipo-luz é positiva. Sempre é possível achar uma transformação de Lorentz que leve um vetor a uma das seguintes formas:

- $a = (+\sqrt{(a^2)}, 0, 0, 0)$, se a é tipo-tempo,
- $a = (1, 1, 0, 0)$, se a é tipo-luz,
- $a = (0, \sqrt{(a^2)}, 0, 0)$, se a é tipo-espaço.

Se a é tipo-tempo, o sistema de referência no qual o vetor tem a forma de cima é chamado o Sistema de Repouso (SR) de a . Há várias maneiras de parametrizar um vetor. Estas serão estudadas quando for necessário. No entanto, uma delas merece destaque pois introduz um parâmetro importante chamado *rapidez*, que será discutida mais adiante. As transformações de Lorentz definidas em (2.1) ou (2.17) formam um grupo abeliano.⁴ Por exemplo, consideremos três referenciais todos na configuração padrão. Seja v_1 a velocidade relativa entre S e S' , v_2 a velocidade relativa entre S' e S'' . Com elas podemos obter a velocidade relativa, v_3 , entre S e S'' :

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (2.22)$$

e o respectivo factor relativístico

$$\gamma_3 = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right). \quad (2.23)$$

⁴Isso não é verdade para uma transformação de Lorentz arbitrária.

A Eq. (2.22) coincide com a lei de adição de velocidades relativística, $v_3 \leq c$. Se, uma das velocidades for igual a c , por exemplo $v_2 = c$, temos $v_3 = c$. Assim a maior velocidade possível é a da luz no vácuo.⁵ Isso garante a princípio da causalidade.

Por exemplo, sejam dois eventos 1 e 2, que para um dado observador acontecem em $x_1 = 0$ e $t_1 = 0$, e $x_2 = L$ e $t_2 = T$. Esse observador pode dizer que o evento 1 é a causa do evento 2. Mas, para um observador com velocidade relativa v com relação ao primeiro temos que o evento 2 ocorre no tempo

$$t'_2 = T \left(1 - \frac{v}{c^2}V\right) \gamma(v),$$

onde usamos a Eq. (2.1) e $V = L/T$. Se impomos que $t'_2 < 0$, ou seja, que o evento 2 ocorra antes do evento 1 para o segundo observador, temos que $vV > c^2$ e pelo menos uma das duas velocidades deve ser maior que c . Nesse caso teríamos uma violação ao princípio de causalidade, a causa (evento 1) ocorre antes que o efeito (evento 2) para o segundo observador. Assim não é possível que ocorram na natureza velocidades maiores que a da luz no vácuo. Esse critério aplica-se para corpos materiais, os quais pode-se mostrar não podem ser acelerados de uma velocidade zero até a velocidade da luz, ou para processos que podem ser inicializados voluntariamente, ou seja que possam carregar informação. Podemos dar exemplo de velocidades superluminares mas que não violam o princípio da causalidade. Ver em [ST04].

A aditividade das velocidades e a estrutura de grupo das TL na configuração padrão pode ser visto mais claramente, introduzindo o parâmetro ξ chamado *rapidez* (rapidity), definido assim:

$$\frac{v}{c} = \tanh \xi, \quad \gamma = \cosh \xi, \quad \frac{\gamma v}{c} = \sinh \xi, \quad (2.24)$$

que faz um mapeamento do intervalo $-1 \leq v/c \leq 1$ em $-\infty < \xi < \infty$. Pelas Eqs. (2.22) e (2.23) verifica-se que,

$$\frac{v_3}{c} \equiv \tanh \xi_3 = \frac{\tanh \xi_1 + \tanh \xi_2}{1 + \tanh \xi_1 \tanh \xi_2} = \tanh(\xi_1 + \xi_2), \quad (2.25)$$

ou seja, que a rapidez é aditiva sob transformações de Lorentz paralelas:

$$\xi_3 = \xi_1 + \xi_2. \quad (2.26)$$

⁵Na verdade c é o parâmetro nas transformações de Lorentz, normalmente é identificado com a velocidade da luz, mas não é necessário que assim seja.

As transformações de Lorentz das Eqs. (2.17), explicitando apenas aquelas no plano $a^0 - a^1$, escrevem-se, em termos da rapidez, como:

$$\begin{aligned} a'^0 &= \cosh \xi a^0 + \sinh \xi a^1 \\ a'^1 &= \sinh \xi a^0 + \cosh \xi a^1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

e as transformações de Lorentz inversas (2.19) são dadas por:

$$\begin{aligned} a^0 &= \cosh \xi a'^0 + \sinh \xi a'^1 \\ a^1 &= \sinh \xi a'^0 + \cosh \xi a'^1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

que também deixam invariante a hipérbole $(a^0)^2 - (a^1)^2 = \text{cte} = a^2$. A rapidez parametriza todos os vetores a que são obtidos a partir de $(\sqrt{(a^2)}, \vec{0})$ e $(0, \sqrt{(a^2)}, 0, 0)$. Equivale a uma rotação imaginária porque $\cos i\xi = \cosh \xi$ e $\sin i\xi = i \sinh \xi$. Ver Fig. 2.1. Inversamente temos para a rapidez,

$$\xi = \ln(\gamma + v\gamma) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p}{E-p} = \ln \frac{E+p}{m}. \quad (2.29)$$

2.3 4-vetor de Energia-Momento

Papel importante têm na cinemática as leis de conservação da energia e do momento. Em física de partículas elementares, as formas de energia que devemos considerar são a energia cinética e a energia de repouso. Em poucos casos utilizamos a energia potencial ou outro tipo de energia. Em todo caso, quando diferentes tipos de energias devem ser consideradas, usualmente são por tempos curtíssimos. Antes e depois de um processo temos partículas livres e, aqui sim, apenas a energia cinética e a de repouso contam. As partículas elementares são idênticas entre si e caracterizadas por números quânticos e sua massa.⁶ A energia de repouso, E_0 , de uma partícula elementar é aquela medida num sistema de referência no qual a partícula está em repouso. As transformações de Lorentz na configuração padrão (no eixo- x)

⁶Para uma discussão da massa em relatividade especial ver: L.B. Okun, *The Concept of Mass (mass, energy, relativity)*, Sov. Phys. Usp. **32**, 629(1989); *The Concept of Mass*, Physics Today, **42**(6), 31 (1989); *ibid*, **43**(5), 15 (1990); *The Concept of Mass in the Einstein Year*, hep-ph/0602037; G. Oas, *On the Abuse and Use of Relativistic Mass*, physics/0504110; *On the Use of Relativistic Mass in Various Published Works*, physics/0504111.

entre a energia-momento nos sistemas S' e S são

$$\begin{aligned}\frac{E'}{c} &= \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta_v p_x\right), \\ p'_x &= \gamma\left(p_x - \beta_v \frac{E}{c}\right), \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Para uma partícula com 3-velocidade $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ em um dado referencial, definimos a 4-velocidade momento u como

$$\begin{aligned}u^\mu &= \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = (cdt/d\tau, d\vec{r}/d\tau) \\ &= \gamma(u)(c, \vec{u}),\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde τ é o tempo próprio da partícula $dt/d\tau = \gamma_u$, $\gamma(\beta_u) = (1 - \beta_u^2)^{-1/2}$, onde $\beta_u^2 = \vec{u}^2/c^2$. Com essa definição temos que $u \cdot u = c^2$. (Podemos definir a 4-velocidade como $u^\mu = dx^\mu/ds$, e neste caso $u \cdot u = 1$).

Podemos definir o 4-vetor momento como

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(u)(c, \vec{u}) \equiv (p^0, \vec{p})\tag{2.32}$$

note que $p^2 = m^2u^2 = m^2c^2$ e, também temos que $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2\gamma(u)^2(c^2 - \vec{u}^2)$, ou seja a relação entre a energia total e o momento total entre o sistema comovel com a partícula (se o observador está em repouso no referencial S' , então $\vec{p}' = 0$, $E' = mc^2$) e o do observador no laboratório (E, \vec{p}) estão dadas por

$$p^0 = \frac{E}{c} = mc\gamma(\beta_u), \quad \vec{p} = m\vec{u}\gamma(u), \quad \gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}.\tag{2.33}$$

Mesmo que essas equações tenham sido deduzidas usando as transformações de Lorentz na configuração padrão [Eqs. (2.19)] são válidas para o caso de transformações de Lorentz gerais (direção arbitrária). No caso que a velocidade da partícula, \vec{u} , seja igual à velocidade relativa entre os dois sistemas de referência S e S' , então $\vec{u} = \vec{v}$. No limite não relativístico a expressão $E = mc^2\gamma \simeq m - (1/2)mv^2$, e $\vec{p} \simeq m\vec{v}$.

Vemos que a massa é um invariante de Lorentz, isto é, tem o mesmo valor em qualquer referencial (para qualquer observador). Existe a seguinte relação entre a energia total, E , e o 3-momento \vec{p} , usando a definição em (2.21) para o produto escalar de dois 4-vetores,

$$p^2 \equiv p \cdot p \equiv \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2c^2.\tag{2.34}$$

Note a notação $\vec{p} \cdot \vec{p} \equiv |\vec{p}|^2$. Também usaremos maiúsculas para denotar o módulo do trivetor, i.e., $|\vec{p}| \equiv P$, etc.

A energia cinética, K , está relacionada com a energia total e a energia de repouso como: $E = E_0 + K$, como pode ser facilmente verificado expandindo a expressão de E em (2.33), logo $K = E - E_0 = E_0(\gamma - 1)$, com $E_0 = mc^2$. Assim, em termos da energia cinética temos

$$\gamma = \frac{K}{E_0} + 1, \quad (2.35)$$

e a variação de γ é

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta K}{E_0},$$

para um elétron de 5 keV, $\Delta\gamma \sim 1\%$. Para um de 50 keV $\Delta\gamma \sim 10\%$. Ou seja, já é mais perceptível o desvio com relação ao esperado no caso não relativístico. Mas tudo vai depender da precisão com a qual serão feitas as medidas comparadas com os cálculos teóricos. Classicamente podemos medir a massa de qualquer “projétil” medindo o momento \vec{p} e a energia cinética K : $m = |\vec{p}|^2/2K$. As partículas elementares no entanto, como já dissemos, são geralmente relativísticas e devemos usar as relações da relatividade restrita, mas o “m” é o mesmo. Em partículas elementares encontramos freqüentemente a necessidade de fazer transformações do sistema do laboratório (SL), onde as medições são feitas, ao sistema do centro de momento (SCM)⁷ onde, geralmente, são feitos os cálculos teóricos. Para isso usamos as transformações de Lorentz consideradas acima.⁸ A conservação da energia refere-se sempre à energia total, E . Usualmente, em física nuclear, onde normalmente a energia em repouso é maior que a energia cinética, quando se diz “uma partícula de tal energia” faz-se referência apenas à energia cinética. Por exemplo, um próton de 0.1 GeV tem $E = E_0 + K = (0.938 + 0.1) \text{ GeV} = 1.038 \text{ GeV}$, mas em altas energias, onde a energia de repouso é desprezível, usa-se sempre a energia total. Usualmente, a energia das partículas é expressa em unidades de momento MeV/c ou GeV/c.

Aqui como dissemos no começo deste capítulo, por simplicidade, estaremos interessados em dois tipos de processo: nos decaimentos de uma partícula e nas colisões entre duas partículas produzindo outras e, na maioria dos casos apenas duas. No decaimento $A \rightarrow \sum B_i$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, de uma

⁷Na literatura é mais comum chamar a este referencial “sistema de centro de massa”.

⁸Sempre estaremos assumindo as transformações particulares das Eqs. (2.17).

partícula de energia E_a e momento p_a decaindo em n outras, com energias E_n e momentos \vec{p}_n , as leis de conservação da energia e do momento são

$$E_a = \sum_i E_i, \quad \text{e} \quad \vec{p}_a = \sum_i \vec{p}_i, \quad (2.36)$$

respectivamente. Numa colisão entre duas partículas essas leis ficam

$$E_a + E_b = \sum_i E_i, \quad \vec{p}_a + \vec{p}_b = \sum_i \vec{p}_i. \quad (2.37)$$

2.4 Transformações de Lorentz: SL e SCM

O SCM é definido como aquele referencial no qual o centro de massa das partículas que colidem está em repouso. Na notação da seção anterior vamos escolher o sistema S' como sendo o SCM. Nesse sistema de referência, no caso não relativístico, podemos transformar o problema de duas partículas com massas m_1 e m_2 colidindo, no problema de um só corpo, com uma massa reduzida $\mu \equiv (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$ e velocidade \vec{v} , que corresponde à velocidade com que a partícula de massa m_1 incide sobre a outra, em repouso, de massa m_2 . O Sistema de Laboratório (SL) é aquele em que é feita uma determinada experiência, e por isso pode ter definições diferentes. Aqui consideraremos que é o referencial S . Estamos supondo sempre que os sistemas SL e SCM se consideram inerciais. Assim podemos transformar uma quantidade definida num desses referenciais na correspondente quantidade no outro, usando uma transformação de Lorentz entre os sistemas S (agora SL) e S' (agora SCM) consideradas por exemplo na Eq. (2.30)]⁹. Definimos o SCM como o referencial onde a soma vetorial dos 3-momentos antes e depois da colisão é nula:

$$\sum \vec{P} = 0,$$

assim, numa colisão de dois corpos não apenas os momentos iniciais são mutuamente antiparalelos, ao longo da direção de incidência, mas também o são os momentos finais na direção (θ^*, ϕ^*) . Uma colisão no SL, como na Fig. (2.2a) é representada no SCM pela Fig. (2.2b).

⁹Nesta secção em particular, letras minúsculas denotarão 4-vetores e letras maiúsculas denotarão 3-vetores: p (4-vetor), \vec{P} (3-vetor) ou $P = |\vec{P}|$ (módulo do 3-vetor). Posteriormente não se fará distinção deixando que o contexto indique que tipo de vetores estamos considerando.

Tratemos em detalhe o caso da colisão entre duas partículas, a e b , com 4-momentos $p_a = (E_a, \vec{P}_a)$ e $p_b = (E_b, \vec{P}_b)$. Os valores das componentes temporais e espaciais de p_a e p_b são determinados pelas condições do experimento, ou melhor, do referencial do observador. Diferentes referenciais implicam diferentes \vec{P}_a e \vec{P}_b . Usaremos a notação seguinte: a ausência de um supercripto denotará quantidades no SL e o asterisco $*$ as quantidades respectivas no SCM; exemplo E é a energia total no SL, e E^* a energia total no SCM; \vec{P} e \vec{P}^* denotam os respectivos 3-momentos etc. Por definição

$$\vec{P}_a^* + \vec{P}_b^* = 0.$$

Casos particulares do SL são o *sistema do alvo*, isto é, aquele no qual o alvo está parado,

$$\vec{P}_b = 0,$$

e o *sistema de feixes colidentes* que é aquele sistema no qual duas partículas de massa idênticas e igual módulo do 3-momento.¹⁰ Na maioria dos anéis de colisão o SL, quando a incidência das partículas idênticas e de igual energia é frontal, coincide com o SCM.

Para tratar o exemplo seguinte, o SL é considerado o sistema de alvo fixo e consideraremos o movimento na direção- x ,¹¹

$$\begin{array}{ll} \text{SCM :} & \text{SL :} \\ p_a^* = (E_a^*, P_a^*, 0, 0) & p_a = (E_a, P_a, 0, 0) \\ p_b^* = (E_b^*, -P_a^*, 0, 0) & p_b = (m_b, 0, 0, 0) \end{array} \quad (2.38)$$

A maneira mais fácil de encontrar relações entre quantidades físicas definidas nos referenciais SL e SCM é escrever essas quantidades em termos de invariantes de Lorentz, mas também podemos encontrar relações diretas entre essas quantidades no SL e SCM.

Se usamos as transformações de Lorentz para a energia e o momento dadas pelas inversas daquelas na Eq. (2.30), i.e., $\beta \rightarrow -\beta$ e trocando as primas nas variáveis, podemos identificar S' com o SCM, e S com o SL e

¹⁰Nem todos os colosires tem o SCM coincidindo com o SL. Por exemplo, no colisor HERA de e^-p no DESY, Alemanha são usados elétrons de 1.96 GeV e prótons de 39.73 GeV. Também no acelerador BBbar em Stanford são usados elétrons de 9.1 GeV e pósitrons de 3 GeV. Para mais informações ver <http://www-public.slac.stanford.edu/babar>.

¹¹Quando não existir ambigüidade omitiremos a flecha para denotar a magnitude de um 3-vetor.

($c = 1$ o momento tem a mesma unidade que a energia), $v = |\vec{v}|$ a velocidade relativa entre o SCM e o SL é adimensional. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} P_a^* &= \gamma(P_a - vE_a), \\ E_a^* &= \gamma(E_a - vP_a), \end{aligned} \tag{2.39}$$

como $\vec{v} = \vec{P}/E$, ver Eq. (2.33), e para o caso em que $\vec{P} = \vec{P}_a + \vec{P}_b$ temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{|\vec{P}_a + \vec{P}_b|}{E_a + E_b} \Big|_{\vec{P}_b=0} = \frac{P_a}{E_a + m_b} \\ \gamma &= (1 - v^2)^{-1/2} = \frac{E_a + m_b}{\sqrt{s}}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

com s um invariante de Lorentz definido como (lembrar que estamos usando $c = 1$ aqui)

$$s = (p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{P}_a + \vec{P}_b)^2. \tag{2.41}$$

No SL escrevemos

$$s = (E_a + m_b)^2 - \vec{P}_a^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a, \tag{2.42}$$

e, no SCM

$$s = (E_a^* + E_b^*)^2. \tag{2.43}$$

Vemos que, neste sistema, o invariante s é o quadrado da soma das energias das partículas incidentes, ou seja, \sqrt{s} é a energia total.

Usando (2.40) em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned} P_a^* &= m_b P_a / \sqrt{s}, \\ E_a^* &= (m_a^2 + m_b E_a) / \sqrt{s}, \\ P_b^* &= -m_b P_a / \sqrt{s} = -P_a^*, \\ E_b^* &= m_b (E_a + m_b) / \sqrt{s}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Nas expressões em (2.44) as energias e os 3-momentos são escritos em termos de quantidades que não são invariantes de Lorentz. Não é surpresa dado que eles mesmos não são invariantes de Lorentz. Mas, podemos também escrever as energias e os 3-momentos em termos de invariantes. Isto é, pode-se encontrar uma relação entre s , m_a , m_b e as variáveis não invariantes E_a , \vec{P}_a e E_b , \vec{P}_b que seja válida para qualquer observador. No SL, $\vec{P}_b = 0$ e $E_b = m_b$, da Eq. (2.42) segue

$$E_a = (s - m_a^2 - m_b^2) / 2m_b, \tag{2.45}$$

e daqui vemos que

$$\begin{aligned}(P_a)^2 &= (E_a)^2 - m_a^2 \\ &= [(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2]/4m_b^2,\end{aligned}\quad (2.46)$$

ou, definindo a função de Källen (ou triangular) ¹²

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz, \quad (2.47)$$

temos

$$P_a = \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2)/2m_b. \quad (2.48)$$

Pode-se mostrar que

$$\lambda(s; m_a^2, m_b^2) = [s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2], \quad (2.49)$$

logo, P_a é uma função real se $\sqrt{s} \geq m_a + m_b$. Como veremos mais adiante, este valor mínimo de \sqrt{s} corresponde ao caso de velocidades iguais $\vec{v}_a = \vec{v}_b$. Esse limite é obtido também considerando a energia cinética,

$$K_a = E_a - m_a = [s - (m_a + m_b)^2]/2m_b.$$

Consideremos agora o SCM, onde $\vec{P}_a^* + \vec{P}_b^* = 0$, usando a notação $P = |\vec{P}|$, temos

$$P_a^* = P_b^* = P^*,$$

e também sabemos que

$$\sqrt{s} = E_a^* + E_b^*.$$

Das duas últimas relações obtemos que $E_a^* = \sqrt{s} - E_b^*$ e, elevando ao quadrado e usando $E_a^{*2} = P^{*2} + m_a^2$ (e procedendo igual com E_b^*), obtemos

$$E_a^* = (m_a^2 - m_b^2 + s)/2\sqrt{s}, \quad E_b^* = (m_b^2 - m_a^2 + s)/2\sqrt{s}, \quad (2.50)$$

e

$$P^* = \lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_a^2, m_b^2)/2\sqrt{s}. \quad (2.51)$$

Em física de partículas elementares, as energias são usualmente maiores que as massas em repouso, então, é possível usar algumas aproximações. Por exemplo, consideremos uma colisão próton-próton no SL. Um dos prótons

¹²É possível escrever esta função λ em diferentes formas.

é o incidente com $P_a \equiv P \geq 5 \text{ GeV}/c$ e o outro está em repouso $P_b = 0$. Podemos verificar que nessas condições a massa do próton é desprezível e podemos assumir que, usando a (2.42),

$$E = P, \quad \text{e} \quad s \simeq 2m_p P. \quad (2.52)$$

No SCM temos

$$E_a^* \simeq E_b^* \simeq P_a^* \simeq P_b^* \simeq \frac{1}{2}\sqrt{s} \simeq \sqrt{(m_p P/2)}. \quad (2.53)$$

Se, por exemplo, $P = 19 \text{ GeV}/c$ na colisão, os valores exatos são $E_a^* = E_b^* = 3.06 \text{ GeV}$, $P_a^* = P_b^* = 2.91 \text{ GeV}/c$ e $s = 37.45 \text{ GeV}^2$, na aproximação acima $E_a^* = 3.08 \text{ GeV}$ e $s = 38 \text{ GeV}^2$, respectivamente.

A energia \sqrt{s} é a energia útil pois é ela que está disponível para a criação de partículas. O resto da energia é usado no movimento do centro de massa. No exemplo acima, como $m_p \simeq 1 \text{ GeV}$ temos que $\sqrt{s} \simeq \sqrt{2P_a}$. Vemos então que aumentando 4 vezes o momento da partícula incidente, \sqrt{s} crescerá só um fator 2. Este é o motivo de serem usados colisores nos quais a energia do centro de massa é nula e assim, toda a energia está disponível para a criação de partículas.

2.4.1 Caso de um número arbitrário de Partículas

Sejam p_1, p_2, \dots um conjunto de 4-momentos. Podemos formar com eles três tipos de invariantes, tais que qualquer outro invariante possa ser expresso em termos deles: a) Produtos escalares,

$$p_i \cdot p_j = E_i E_j / c^2 - \vec{P}_i \cdot \vec{P}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Para o caso de duas partículas, em vez de $p_1 \cdot p_2$ usamos a variável s , denotada agora como s_{12} : o *quadrado da massa invariante* das duas partículas,

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2,$$

que já consideramos acima, t ou t_{12} , o *invariante do momento transferido*:

$$t_{12} = (p_1 - p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2p_1 \cdot p_2.$$

Sendo m_1 e m_2 constantes s_{12} , t_{12} e $p_1 \cdot p_2$ têm seu valor extremo simultaneamente. Fixando \vec{P}_1 , isso ocorre quando

$$\frac{\partial(p_1 \cdot p_2)}{\partial \vec{P}_2} = E_1 \frac{\vec{P}_2}{E_2} - \vec{P}_1 = -E_1 \left(\frac{\vec{P}_1}{E_1} - \frac{\vec{P}_2}{E_2} \right) = -E_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

que é zero quando $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ (usamos $\vec{p}/E = \vec{v}$, usamos $c = 1$). Esta é uma condição invariante de Lorentz porque velocidades iguais são iguais em qualquer referencial (verifique esta afirmação). O valor extremo se encontra diretamente no referencial $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ que dá

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right) \frac{E_1 E_2}{c^2} \\ &= \gamma^2 \frac{E_1 E_2}{c^2} \geq m_1 m_2 c^2, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} s_{12} &\geq (m_1 + m_2)^2 \\ t_{12} &\leq (m_1 - m_2)^2 c^2 \end{aligned} \tag{2.54}$$

O sinal igual corresponde a $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ em qualquer referencial. b) O sinal da componente da energia de um 4-vetor tipo-tempo é invariante de Lorentz pois estamos considerando apenas transformações de Lorentz ortócronas. c) A quantidade

$$\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} a_\alpha b_\beta c_\mu d_\nu,$$

é invariante, com $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ sendo o tensor completamente anti-simétrico de Levi-Civita em 4 dimensões.

2.5 A Seção de Choque

O resultado de uma colisão é dado em termos de uma *seção de choque*. Essa quantidade representa a área efetiva da colisão e, usualmente, é dada em cm^2 ou nas unidades barns definidas como

$$1b = 1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 100 \text{ fm}^2,$$

onde fm denota a unidade “fermi” ou “fentômetro” definida como

$$1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}.$$

Consideremos um feixe colimado de partículas monoenergéticas incidindo num material de área normal A , e espessura d . Se este material contém n alvos, a densidade de alvos, i.e., o número de alvos por unidade de volume é

$$\mathcal{N} = \frac{n}{Ad}$$

Por exemplo, para um gás monoatômico em condições STP (*standard temperature and pressure*) $\mathcal{N} = 2.687 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Se a espessura d é suficientemente pequena podemos assumir que não há superposição dos alvos e que há apenas uma colisão por partícula incidente. Cada alvo tem uma área efetiva σ . Nestas condições, a área efetiva total do alvo é $n\sigma$ e a probabilidade, P , de que a partícula incidente colida de fato é

$$P = \frac{n\sigma}{A} = \mathcal{N}\sigma d.$$

Se o número de partículas incidentes por segundo é N , a taxa de reação R , isto é, o número de reações por segundo é

$$R = PN = N\mathcal{N}\sigma d, \quad (2.55)$$

ou seja, $R = Nn\sigma/A$. A seção de choque então pode ser expressa em termos de parâmetros relativos às condições experimentais:

$$\sigma = \frac{R}{N} \frac{1}{n/A} = \frac{\text{reações/seg}}{(\text{part. inc./seg})(\text{núm. de alvos/cm}^2)}. \quad (2.56)$$

Outra expressão para a taxa de reação R é em termos do fluxo de partículas incidentes $F = n_i v$, onde n_i é o número de partículas incidentes por unidade de volume, usualmente $n_i = 1/V$ (ou seja uma partícula por unidade de volume) e v a velocidade das partículas com respeito ao um alvo estacionário. Podemos então escrever

$$R = Fn\sigma, \quad (2.57)$$

onde n é o número de alvos no volume Ad .

As definições em (2.55) ou (2.57) são úteis para colisões com um alvo estacionário. Neste caso sabemos que o número de alvos por unidade de volume é muito grande, da ordem de 10^{19} . No caso dos colisores o número de colisões é muito pequenos. É usual usar neste caso a *luminosidade*, \mathcal{L} definida como o número de eventos por de seção de choque por unidade de tempo,

$$\mathcal{L} = \frac{R}{\sigma}, \quad (2.58)$$

quando ocorre um encontro entre os dois feixes. Cada feixe é formado por *bunchs*, ou seja um conjunto de partículas, N_1 e N_2 em cada um. Normalmente um bunch de um feixe colide com um bunch do outro. Se a frequência

da colisão dos bunches é f , e se cada um dos bunches é uniforme em uma área A , então a luminosidade na região de interação é

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2 f}{A}. \quad (2.59)$$

O número de centros de espalhamento n num alvo que consiste de um núcleo com peso atômico A e densidade ρ esta dada por

$$n = \frac{N_A \rho}{A},$$

onde N_A é o número de Avogadro, $N_A = 6.0222 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$.

O conceito de seção de choque é de grande utilidade em várias ramas da física, mas o que queremos aqui é defini-la no caso de uma teoria quântico-relativística. Antes, no entanto, consideremos o caso de dinâmica de partículas relativística, para depois generalizar o conceito para o caso que nos interessa.

Nas expressões acima, σ é a *seção de choque total*, ou seja podemos substituir σ por σ_{tot} . Muitas vezes mede-se a *seção de choque diferencial*

$$\sigma(\Theta) = \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega},$$

logo

$$\sigma_{total} = \int \sigma(\Theta) d\Omega. \quad (2.60)$$

2.5.1 Caso da Mecânica Relativística

No caso relativístico vamos introduzir a seção de choque partindo de uma grandeza obviamente invariante: o número de eventos dN (é um número puro). Neste caso a colisão é caracterizada pela *seção de choque invariante*. Consideremos, para simplificar, o caso de dois feixes de partículas A e B em colisão e n_a e n_b as respectivas densidades número de partículas (ou seja, o número de partículas por unidade de volume), com velocidades \vec{v}_a e \vec{v}_b em um sistema de referência arbitrário. Assumiremos que a colisão ocorrem sempre entre apenas uma partícula de cada feixe, ou seja, que não existem colisões múltiplas.

No referencial de repouso da partícula B, a partícula A colide com um alvo estacionário, B . Definimos a seção de choque total σ como o fator com

dimensão de área na expressão do número de colisões, dN , num volume dV e num intervalo de tempo dt :

$$dN = \sigma v_{\text{rel}} n_a n_b dV dt \quad (2.61)$$

onde v_{rel} é a velocidade relativa das partículas no referencial de repouso da partícula B. De fato, essa é a definição de velocidade relativa entre duas partículas. Podemos escolher qualquer uma para definir essa velocidade. Note que a seção de choque está relacionada com a probabilidade de que a colisão ocorra, uma seção de choque grande implica muitas colisões, o contrário para uma seção de choque pequena. Como dN é o número de eventos (colisões), deve ser um invariante, ou seja, não deve depender do observador. Devemos então escrever uma expressão para dN que seja válida em qualquer observador:

$$dN = \mathcal{A} n_a n_b dV dt, \quad (2.62)$$

onde \mathcal{A} é uma quantidade a ser determinada. Sabemos apenas que para um observador em repouso com a partícula B, segundo a Eq. (2.61): $\mathcal{A} = \sigma v_{\text{rel}}$.

A seção de choque σ no referencial de repouso de uma das partículas, por definição é invariante. Também a própria definição de velocidade relativa é invariante. Nesse caso, \mathcal{A} é um invariante relativístico também. Por outro lado o fator $dV dt$ é invariante também $dV dt = (dV' \gamma^{-1})(dt' \gamma) = dV' dt'$. Assim o produto $\mathcal{A} n_a n_b$ deve ser invariante. Devemos então determinar como transforma $n_{a,b}$. Como o número de partículas $n dV$ em um elemento de volume dV , é um “evento”, ou seja, não deve depender do observador, $n dV = n' dV'$ (o referencial “linha” é o de um observador arbitrário), ou seja, $n = n' \gamma = n'(E/m)$ onde E é a energia total da partícula e m sua massa (essa análise vale para partículas massivas, para partículas sem massa podemos usar o referencial do centro de massa). Estudar a invariância relativística de $\mathcal{A} n_a n_b$ é igual a estudar a de $\mathcal{A} E_a E_b$, mas por efeitos de dimensão e, para ganhar generalidade, estudaremos o fator definido como:

$$\mathcal{A} \frac{E_a E_b}{p_a \cdot p_b} = \mathcal{A} \frac{E_a E_b}{E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b}. \quad (2.63)$$

No sistema de repouso da partícula B ($c = 1$), temos que $E_b = m_b$, $\vec{p}_b = 0$, \mathcal{A} reduz-se a σv_{rel} . Logo, num referencial arbitrário

$$\mathcal{A} = \sigma v_{\text{rel}} \frac{p_a \cdot p_b}{E_a E_b} \quad (2.64)$$

e a Eq. (2.62) fica

$$dN = \sigma v_{\text{rel}} \frac{p_a \cdot p_b}{E_a E_b} n_a n_b dV dt. \quad (2.65)$$

No referencial de repouso da partícula B ($c = 1$)

$$p_a \cdot p_b = E_a m_b = m_a m_b \gamma = \frac{m_a m_b}{\sqrt{1 - v_{\text{rel}}^2}},$$

de onde obtemos

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_a m_b}{p_a \cdot p_b} \right)^2} = \frac{1}{p_a \cdot p_b} \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}. \quad (2.66)$$

Se p_a e p_b são dois 4-vetores arbitrários, então

$$\begin{aligned} p_a \cdot p_b &= E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b = E_a E_b (1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b) \\ &= \frac{m_a m_b (1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b)}{\sqrt{(1 - v_a^2)(1 - v_b^2)}}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

temos que a velocidade relativa está dada também por

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2}}{1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}. \quad (2.68)$$

Podemos escrever a Eq. (2.65) de várias formas. Usando a expressão da velocidade relativa em (2.66):

$$dN = \sigma \frac{\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}{E_a E_b} n_a n_b dV dt, \quad (2.69)$$

ou, usando a velocidade relativa na primeira linha de (2.67) e (2.68),

$$dN = \sigma \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2} n_a n_b dV dt. \quad (2.70)$$

No caso de velocidades colineares $\vec{v}_a \times \vec{v}_b = 0$ e temos

$$dN = \sigma |\vec{v}_a - \vec{v}_b| n_a n_b dV dt. \quad (2.71)$$

No SCM (verificar esta expressão):

$$(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 = P^{*2} (E_a^* + E_b^*)^2 \quad (2.72)$$

onde $P^* = |\vec{p}^*|$, e obtemos

$$dN = \sigma \frac{P^*(E_a^* + E_b^*)}{E_a^* E_b^*} n_a n_b dV dt. \quad (2.73)$$

Por outro lado, no SL temos: $\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = m_b |\vec{p}_a|$, temos

$$dN = \sigma \frac{m_b P_b}{E_a E_b} n_a n_b dV dt \quad (2.74)$$

A análise clássica de partículas relativísticas é incorporada na teoria quântica de campos. Mas dois conceitos de origem puramente quântica devem ser acrescentados: o conceito de densidade do espaço de fase e o de partículas idênticas. O conceito de espaço de fase pode ser discutido no caso não relativístico, o que será feito na próxima seção. Depois discutiremos o caso quântico-relativístico.

2.6 O Espaço de Fase

Em mecânica quântica, a definição de probabilidade de transição é dada pela chamada *regra de ouro* de Fermi. Esta regra dá a taxa de transição de um estado inicial α a um estado final β (usaremos a notação $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$ ou apenas $\alpha \rightarrow \beta$). A regra é:

$$W_{\beta\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle\beta| H_{\text{int}}|\alpha\rangle|^2 \rho(E), \quad (2.75)$$

onde H_{int} denota a Hamiltoniana de interação. Não interessa, por enquanto, a sua expressão matemática. A dedução da Eq. (2.75) é feita nos cursos de mecânica quântica, usando a interação eletromagnética, e por isso não será considerada aqui. O fator $\rho(E)$ na Eq. (2.75) é chamado *fator de espaço de fase*, e será discutido abaixo. A definição na Eq. (2.75) é válida mesmo no caso de teoria quântica de campos. Devemos encontrar agora uma maneira de calcular o fator de espaço de fase que é definido formalmente como $\rho(E) = dN/dE$.

2.6.1 Caso de 1 Partícula

Consideremos, por simplicidade, o caso unidimensional com a partícula movendo-se na direção- x com um momento p_x . O espaço de fase, então, é um espaço

bidimensional, dado pelas posições e momentos simultâneos da partícula, xp_x . A representação é diferente no caso clássico e no quântico. No caso clássico, tanto a posição como o momento podem ser medidos simultaneamente com precisão arbitrária e os estados da partícula podem ser representados por pontos no espaço xp_x . Na mecânica quântica, porém, temos a relação de incerteza

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2,$$

que limita a descrição no espaço de fase, dado que implica que não podemos medir simultaneamente, com precisão arbitrária, a posição e o momento. O produto das incertezas deve ser maior que $\hbar/2$ e, por isso, a partícula deve ser representada por uma célula (área igual ou maior que $\hbar/2$) no espaço de fase. A forma da célula depende das medições feitas, mas a área, neste caso unidimensional, é sempre $2\pi\hbar$. Por exemplo, na área Lp , o número máximo de células que nela podem ser empacotadas é

$$N = \frac{Lp}{2\pi\hbar}, \quad (2.76)$$

e N é o número de estados na área Lp . O número de estados não necessariamente coincide com o número de partículas. Um estado pode acomodar só um férmion, mas um número arbitrário de bósons. Por exemplo, a partícula numa caixa de largura L , tem os níveis de energia

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

para cada energia há dois possíveis valores do momento $p = \pm\sqrt{2mE}$, onde o sinal indica a direção do movimento ao longo do eixo- x . Podemos verificar que a Eq.(2.76) é satisfeita (o fator 2 aparece pelos dois valores possíveis do momento). A Eq.(2.76) é válida para uma partícula com *um* grau de liberdade. Para o caso de uma partícula em três dimensões, o volume da célula do espaço de fase é $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ e o número de estados num volume $\int d^3x d^3p$ está dado por

$$N_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x d^3p.$$

Se a partícula está confinada num volume espacial V temos

$$N_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p. \quad (2.77)$$

O subíndice 1 indica que N_1 é o número de estados de 1 (uma) partícula. O fator densidade de estados ρ definido na Eq. (2.75) é

$$\rho_1 = \frac{dN_1}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int p^2 dp d\Omega,$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido. Como $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ temos que

$$\frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp},$$

então

$$\rho_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Ep}{c^2} \int d\Omega. \quad (2.78)$$

Se não estamos interessados numa direção particular, podemos integrar a Eq.(2.78) por todo o ângulo sólido e temos

$$\rho_1 = \frac{VpE}{2\pi^2c^2\hbar^3}. \quad (2.79)$$

2.6.2 Caso de 2 Partículas

Consideremos agora a densidade de estados para duas partículas, 1 e 2. Se o momento total das duas partículas é fixado, o momento de uma determina o momento da outra. Quer dizer que não temos realmente novos graus de liberdade e, por isso, o número total de estados no espaço dos momentos está dado ainda pela Eq.(2.77). No entanto, o fator densidade de estados é diferente que o da Eq.(2.78) porque agora E refere-se à energia total das duas partículas.

$$\rho_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3p_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1,$$

onde

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 dp_1 c^2}{E_1} + \frac{p_2 dp_2 c^2}{E_2}$$

Para facilitar, façamos o cálculo no SCM, isto é, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, ou seja,

$$p_1^2 = p_2^2 \longrightarrow p_1 dp_1 = p_2 dp_2,$$

e

$$dE = p_1 dp_1 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2.$$

Temos finalmente que

$$\rho_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) p_1 c^2} \frac{d}{dp_1} \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1,$$

ou

$$\rho_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) c^2} p_1 \int d\Omega_1. \quad (2.80)$$

2.6.3 Caso de n Partículas

A extensão para o caso de 3 ou mais partículas é direta. Consideremos três partículas sujeitas ao vínculo

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0.$$

O momento de duas partículas pode variar livremente mas o da terceira está fixado. O número total de estados é

$$N_3 = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2,$$

e o fator densidade de estados

$$\rho_3 = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2.$$

Finalmente, para o caso de n partículas temos

$$\rho_n = \frac{V^{(n-1)}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 \cdots \int d^3 p_{n-1}. \quad (2.81)$$

2.7 Decaimentos e Colisões em Teoria Quântica de Campos

Vamos introduzir agora os conceitos de seção de choque e de largura de decaimento no caso de teoria quântica de campos.

2.7.1 Seção de Choque Invariante

Em geral, a seção de choque diferencial de ordem n tem uma estrutura do tipo:

$$d^n \sigma = \left(\frac{dN/T}{V} \right) \left(\frac{1}{\text{Fluxo Inicial}} \right) d^n \rho S, \quad (2.82)$$

onde dN/T dá a taxa de transição. Assim, o primeiro fator então dá a taxa de transição por elemento de volume. O segundo fator é o fluxo incidente das partículas A e B , $d^n \rho$ é a densidade de estados do espaço de fase das partículas no estado final, e S é o fator estatístico que leva em conta o número de partículas idênticas no estado final. $S = \prod_j (1/j!)$ se o número dessas partículas for j . O fator de fluxo inicial pode ser escrito, comparando a Eq. (2.82) com a definição de $d\sigma$ usando a Eq. (2.69),

$$\begin{aligned} (\text{Fluxo Inicial})^{-1} &= \frac{E_a E_b}{\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \frac{1}{n_a n_b}, \\ &= \frac{V^2}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde na primeira linha n_a e n_b representam a densidade de número de partículas do tipo A e B , respectivamente. O resto da notação é óbvia. Na segunda linha colocamos a forma de como fica o fator de fluxo em teoria quântica de campos. Para simplificar usaremos um campo escalar complexo. Como será discutido no curso de Teoria de Campos I, esse tipo de campo obedece à equação de Klein-Gordon e tem uma corrente conservada da forma

$$j^\mu(x) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (2.84)$$

e, se usarmos a solução de onda plana

$$\phi(x) = N e^{-ip \cdot x},$$

onde N é um fator de normalização, em geral complexo, obtemos

$$j^\mu(x) = 2p^\mu |N|^2. \quad (2.85)$$

Em particular, a densidade número de partículas é então $\rho = 2E$ (ou, na notação nossa, $n = 2E$). Como o número de partículas num volume, ρdV , deve ser um observável. Temos, então que $\int \rho dV = 2E|N|^2 \int dV = 2E|N|^2 V$. Podemos escolher a normalização de ter $2E$ partículas por volume (que é obviamente invariante, dado que o fator γ da transformação de E cancela o fator γ^{-1} da transformação de V), o que implica a normalização $N = 1/\sqrt{V}$. É este o fato que queremos justificar e que é válido em geral: cada campo (de qualquer tipo, não apenas um campo escalar complexo), numa amplitude, introduz um fator $1/\sqrt{V}$. Esta é a razão do fator V^2 na segunda linha da Eq. (2.83): $n_a = 2E_a/V$, $n_b = 2E_b/V$. O fator 2 será explicado mais embaixo. Pode-se verificar que todos os fatores V cancelam-se quando levarmos em conta todos os outros fatores na definição da seção de choque, assim, em geral, pode ser escolhido um volume unitário $V = 1$ (mas não esquecer as dimensões). O tratamento do espaço de fase da seção anterior usou a relação relativística entre a energia e o momento, mas ele pode ser usado num contexto não relativístico, ou seja, a invariância relativística não era manifesta. Como em física de partículas elementares os processos são relativísticos, vamos considerar o espaço de fase numa forma que seja manifestamente invariante relativística. Cada elemento do volume do espaço de fase está agora definido como:

$$\frac{V d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (2.86)$$

onde fator $1/2E_i$, com $E_i^2 = \vec{p}_i^2 + m_i^2$ é introduzido porque agora estamos tratando o caso relativístico e $d^3 p/2E$ é que é invariante de Lorentz. É fácil verificá-lo,

$$\frac{1}{2E} = \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0), \quad (2.87)$$

e usando

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

onde x_i são os zeros da função $f(x)$. No caso $f(p^0) = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$ com raízes $p^0 = \pm E$, e $|f'(\pm 2E)| = 2E$. Então

$$\frac{1}{2E} = \int_0^{\infty} dp^0 \left[\frac{\delta(p^0 - E)}{2E} + \frac{\delta(p^0 + E)}{2E} \right]$$

a segunda δ não contribui e, introduzindo a função $\theta(p^0)$ podemos integrar desde $-\infty$. explicitamente escrevendo

$$\frac{d^3p}{2E} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0). \quad (2.88)$$

Note que na Eq. (2.88) a integral é apenas em dp^0 .

Então, o elemento de volume do espaço de fase é

$$d^n\rho = \prod_{i=1}^n \frac{V d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i} = V^n \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (2.89)$$

Na definição da seção de choque, o elemento de fluxo inicial e o fator de espaço de fase introduzem um fator V^{2+n} no numerador. Falta agora apenas ver o que substitui o fator dN/TV na Eq. (2.82), para o caso de teoria quântica de campos. Podemos definir

$$\mathcal{M}' = \langle \phi_1^* \cdots \phi_n^* | H | \phi_a \phi_b \rangle (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right). \quad (2.90)$$

A primeira coisa a ser observada na Eq. (2.90) é que cada campo introduz um fator $1/\sqrt{V}$ e temos $n + 2$ campos, então este fator produz, quando quadrado um fator $V^{-(2+n)}$ que cancela o fator V^{2+n} do numerador e, por isso, não sobrevive nenhum fator V na definição da seção de choque definida na Eq. (2.82). O problema é quadrar a amplitude \mathcal{M}' . Um exemplo simples de calcular é o quadrado de uma função- δ , por exemplo, a da energia:

$$\begin{aligned} [\delta(E_f - E_i)]^2 &= \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt \\ &= \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt \\ &= \delta(E_f - E_i) T. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Claro que essa equação só tem sentido quando integrada no conjunto de estados iniciais e finais. Na segunda para a terceira linha usamos $E_f = E_i$ na integral apenas. Ou seja, neste caso temos

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 = \delta(E_f - E_i) T.$$

No caso 4-dimensional temos (para maiores detalhes consulte um livro de teoria quântica de campos):

$$\left[\left((2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) \right) \right]^2 = (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) VT.$$

Usando este resultado, obtemos o quadrado da expressão (2.90)

$$|\mathcal{M}'|^2 = |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) VT. \quad (2.92)$$

onde definimos

$$|\mathcal{M}|^2 = |\langle \phi_1^* \cdots \phi_n^* | H | \phi_a \phi_b \rangle|^2, \quad (2.93)$$

Depois disso, vemos que o equivalente do fator clássico dN/VT , é $|\mathcal{M}'|^2/VT$. Podemos então escrever a definição para a seção de choque diferencial compatível com (2.82) e (2.83),

$$d^n \sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} S. \quad (2.94)$$

Dependendo da forma usada para o fator de fluxo inicial podemos escrever também:

$$d^n \sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_a E_b v_a} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} S, \quad (2.95)$$

no referencial de repouso da partícula b ou, no SCM

$$d^n \sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_a^2, m_b^2)} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_i p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} S, \quad (2.96)$$

onde λ é a função de Källen definida na Eq. (2.47).

Consideremos a reação $A + B \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n$, a qual aparece na Fig. 2.4. No caso da interação fraca, veremos uma aplicação do caso de três partículas mas numa situação que permite fazer algumas simplificações. A conservação da energia-momento neste caso é

$$E_a + E_b = \sum_{i=1}^n E_i, \quad \vec{p}_a + \vec{p}_b = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

com $E_i^2 = \vec{p}_i^2 + m_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde as massas m_i são as massas das partículas no estado final. Pela conservação do momento, nem todos os n 3-momentos, \vec{p}_i , são independentes para um estado inicial fixo, pois devem satisfazer as equações acima. Em alguns livros de texto, o espaço $3n$ -dimensional dos 3-momentos sem vínculos é chamado de espaço dos momentos e a superfície $(3n - 4)$ -dimensional é chamada espaço de fase. Às vezes, no entanto, o espaço dos momentos e o de fase são considerados sinônimos e a superfície de $(3n - 4)$ dimensões é chamada superfície de energia e momento constantes. Para manifestar propriedades dos dados experimentais e de modelos teóricos usam-se massas invariantes ou momentos transferidos. Neste caso, porém, o espaço de fase fica complicado.

2.8 Espaço de Fase Relativístico

Adaptaremos aqui alguns dos exemplos não relativísticos vistos na Sec. 2.6. A amplitude probabilidade da transição de um estado inicial $A + B$ a um estado final com momentos \vec{p}_i bem definidos será denotada por

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | H | \vec{p}_a, \vec{p}_b \rangle \equiv \mathcal{M}(\vec{p}_i), \quad (2.97)$$

para o caso de uma reação do tipo $A + B \rightarrow 1 + \cdots + n$, e

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_m | H | \vec{p}_a \rangle \equiv \mathcal{T}(\vec{p}_i), \quad (2.98)$$

no caso de uma decaimento do tipo $A \rightarrow 1 + \cdots + m$. Mas deve-se notar que este é um caso particular da Eq. (2.75) se identificamos $|\alpha\rangle \rightarrow |\vec{p}_a, \vec{p}_b\rangle$ e $|\beta\rangle \rightarrow |\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_n\rangle$ para o caso de uma reação. De fato a definição da taxa de transição em (2.75) ainda é válida, mas agora vamos escrever $\rho(E)$ numa forma invariante de Lorentz e usar uma notação mais apropriada para cálculos em teoria quântica de campos. As quantidade $\mathcal{M}(\vec{p}_i)$ e $\mathcal{T}(\vec{p}_i)$ devem ser determinadas experimentalmente. Elas contêm a dinâmica, i.e., deve também ser possível de se calcular teoricamente. Quantidades como a vida média e as seções de choque dependerão de $|\mathcal{T}(\vec{p}_i)|^2$ e $|\mathcal{M}(\vec{p}_i)|^2$, respectivamente.

A partir da definição (2.96), podemos definir a *seção de choque total* para um dado canal $\sigma_n \equiv \sigma_n(s; m_i)$ como

$$\sigma_n = \frac{1}{F} I_n(s), \quad (2.99)$$

onde

$$F = 2 \lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_a^2, m_b^2) (2\pi)^{3n-4},$$

é o fator de fluxo e

$$I_n(s) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p_a + p_b - \sum_i p_i) |\mathcal{M}(\vec{p}_i)|^2. \quad (2.100)$$

A função- δ em (2.100) impõe a conservação da energia-momento. Note-se que todos os fatores π foram passados para o fator de fluxo inicial. A *vida média* de uma partícula de massa m é definida como

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2m} \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} I_n(m^2), \quad (2.101)$$

com

$$I_n(m^2) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p - \sum_i p_i) |\mathcal{T}(\vec{p}_i)|^2. \quad (2.102)$$

A *seção de choque diferencial* é outra quantidade mensurável e calculável. Seja $x = x(\vec{p}_i)$ uma variável dependente de \vec{p}_i . A seção de choque diferencial $d\sigma/dx$ está definida como

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{F} \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \delta^4(p_a + p_b - \sum_i p_i) \delta[x - x(\vec{p}_i)] |\mathcal{M}(\vec{p}_i)|^2, \quad (2.103)$$

e satisfaz trivialmente

$$\int dx (d\sigma_n/dx) = \sigma_n.$$

Da mesma maneira definimos $d^2\sigma_n/dx dy, \dots$. Dada uma seção de choque diferencial, podemos calcular a respectiva distribuição, $w(x)$, definida como

$$w(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}, \quad (2.104)$$

que obviamente está normalizada à unidade

$$\int dx w(x) = 1.$$

De maneira análoga definem-se distribuições que dependem de diversas variáveis. A operação de *mudança de variáveis* é útil freqüentemente. Se $w(x, y, z)$ é

uma distribuição de 3 variáveis e estas estão relacionadas com x', y', z' por uma transformação um-a-um, temos que

$$\begin{aligned} w'(x', y', z') &= \frac{1}{\sigma} \frac{d^3\sigma}{dx'dy'dz'} \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{d^3\sigma}{dxdydz} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \\ &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \right| w(x, y, z). \end{aligned}$$

onde $\partial(x, y, z)/\partial(x', y', z')$ é o jacobiano da transformação que sempre é positivo.

2.8.1 Integral do Espaço de Fase

Quando $\mathcal{T}(\vec{p}_i)$ ou $\mathcal{M}(\vec{p}_i)$ são constantes, sem perder generalidade tomamos $\mathcal{T} = 1$ ou $\mathcal{M} = 1$. Os valores dos observáveis, como a seção de choque, as distribuições etc, calculadas com em estes casos são válidas geralmente a baixas energias. Chamam-se a essas *seção de choque da distribuição do espaço de fase*. A altas energias, verifica-se um afastamento desta aproximação. Usualmente, assume-se que $\mathcal{T} = 1$ dá a contribuição puramente cinemática e que qualquer desvio denota um efeito dinâmico, por exemplo, a formação de uma ressonância. Neste caso, denotemos o fator de espaço de fase por $I_n \equiv R_n$, onde

$$R_n = \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3p_i}{2E_i} \delta^4(p - \sum_i p_i), \quad (2.105)$$

onde $s = p^2$.

2.8.2 Estado Final de Duas Partículas

Consideremos o caso de duas partículas no estado final. O estado inicial entra apenas na conservação do 4-momento, $p = p_1 + p_2$. Assim, se $p = (E, \vec{p})$ é o 4-momento do estado inicial, este pode ser o respectivo 4-momento de uma partícula que decai em duas outras $A(p) \rightarrow 1(p_1) + 2(p_2)$, ou duas partículas que colidem, $A(p_a) + B(p_b) \rightarrow 1(p_1) + 2(p_2)$, sendo que p é seu 4-momento total, $p = p_a + p_b$.

Neste caso, a integral do espaço de fase, é dado por

$$R_2(p, m_1^2, m_2^2) = \int \frac{d^3 p_1}{2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta^4(p - p_1 - p_2) \quad (2.106)$$

e, usando duas vezes (2.88), temos

$$R_2(p; m_1^2, m_2^2) = \int d^4 p_1 d^4 p_2 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_2^2 - m_2^2) \delta^4(p - p_1 - p_2). \quad (2.107)$$

Aqui as constantes m_1^2, m_2^2 podem ter ambos sinais. R_2 é uma função de $s = p^2 = E^2 - \vec{p}^2$, e de m_1^2, m_2^2 . Vamos calcular a Eq.(2.107) para p tipo tempo. Os casos tipo espaço e tipo luz também podem ocorrer mas não serão discutidos aqui.

Primeiro integramos a (2.107) em p_2 usando a função- δ de 4 dimensões e um referencial no qual possamos escrever o 4-vetor tipo tempo como $p = (\sqrt{s}, \vec{0})$ (o caso de um referencial geral não será discutido aqui), temos

$$\begin{aligned} R_2(s; m_1^2, m_2^2) &= \int d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta[(p - p_1)^2 - m_2^2] \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{2E_1^*} \delta(s - 2\sqrt{s}E_1^* + m_1^2 - m_2^2). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Se integramos na primeira linha de (2.108) usando a primeira função- δ que implica $p_1^2 = m_1^2$, obtemos a segunda linha da Eq. (2.108). Como usamos

$$d^3 p_1 = P_1^{2*} dP_1^* d\Omega_1^* = P_1^* E_1^* dE_1^* d\Omega_1^*,$$

(onde usamos a notação $P_1 = |\vec{p}|_1$) a (2.108) fica

$$R_2(s; m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{2} \int P_1^* d\Omega_1^* \int_{-\infty}^{\infty} dE_1^* \delta(s - 2\sqrt{s}E_1^* + m_1^2 - m_2^2). \quad (2.109)$$

Podemos agora completar a intergração de R_2

$$R_2(s; m_1^2, m_2^2) = \frac{P_1^*}{4\sqrt{s}} \int d\Omega^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_1^2, m_2^2)}{8s} \int d\Omega^*. \quad (2.110)$$

Se o elemento de matriz é constante, podemos continuar a integração obtendo

$$R_2(s) = \frac{\pi P_1^*}{\sqrt{s}} = \pi \frac{\sqrt{\lambda}}{2s}. \quad (2.111)$$

O ângulo sólido Ω_1^* descreve a orientação de \vec{p}_1 no sistema de referência de p , e a função- δ fixa a magnitude do momento de decaimento. Em (2.110) usamos a função- δ , e que implica

$$E_1^* = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2),$$

logo

$$\begin{aligned} P_1^* &= \sqrt{E_1^{*2} - m_1^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{(s + m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_1^2, m_2^2) = P_2^*. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Todas as expressões para R_2 acima têm uma função $\theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$ que vem da $\theta(p^0)$ no fator $d^3p/2E$, e que garante que R_2 anule-se debaixo do limiar (*threshold*).

2.9 Espalhamento de Duas Partículas

As reações entre duas partículas podem ser de dois tipos *exclusivas*, *semi-inclusivas* ou *inclusivas*, para os dois primeiros tipos. Nas reações exclusivas são detectadas todas as partículas no estado final. Nas semiinclusivas apenas algumas partículas são detectadas e nas inclusivas apenas uma partícula no estado final é detectada.

Trataremos agora o caso da reação $A + B \rightarrow 1 + 2$. Ver notação na Fig. 2.4. O espaço de fase (s fixo) é bidimensional e parametrizado, por exemplo, pelo ângulo de espalhamento θ e a variável angular ϕ que descreve rotações ao redor do eixo do feixe. Como esta última variável é trivial, temos duas variáveis essenciais: a energia total fixa (\sqrt{s}) e o ângulo de espalhamento (θ). Outro tipo de variáveis são possíveis, tipo energia como E_a, P_a e também variáveis angulares, como ângulo entre \vec{p}_a e \vec{p}_1 em ambos os sistemas SCM e SL.

$$\begin{aligned} \theta_1^* &\equiv \theta_{a1}^* \\ &= \pi - \theta_{a2}^*. \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \theta_{a1}.$$

Chama-se *forward scattering* ao espalhamento com $\theta_1^* \approx 0$ e *backward scattering* àquele com $\theta_1^* \approx \pi$. A variável invariante de Lorentz relacionada ao ângulo é o momento transferido invariante

$$\begin{aligned} t &\equiv t_{a1} \\ &= (p_a - p_1)^2 \\ &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2P_a P_1 \cos \theta_{a1}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

No SCM o tratamento cinemático é simples porque a dependência na energia e nos ângulos está desacoplada. Por exemplo, os momentos são

$$\begin{aligned} P_a^* = P_b^* &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}, & E_a^* &= \sqrt{P_a^{*2} + m_a^2}, \\ P_1^* = P_2^* &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s; m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}, & \text{etc} & \end{aligned} \quad (2.114)$$

No SL as relações são mais complicadas. Assumamos que \sqrt{s} é fixo, isto é, o estado inicial $a + b$ está fixado. Então qualquer das 4 variáveis do estado final P_1, θ_1, P_2 ou θ_2 determinará as outras 3.

A seção de choque no SCM para o caso $A(p_a) + B(p_b) \rightarrow 1(p_1) + 2(p_2)$, usando (2.94) para este caso

$$d^2\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}. \quad (2.115)$$

No SCM $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$ e

$$\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = \sqrt{s} P_a^*$$

onde $\sqrt{s} = E_a^* + E_b^*$, temos

$$d^2\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 \sqrt{s} P_a^*} \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1^*}{E_1^*} \frac{d^3 p_2^*}{E_2^*}. \quad (2.116)$$

por outro lado

$$\delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) = \delta(E_a^* + E_b^* - E_1^* - E_2^*) \delta^3(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

podemos integrar em $d^3p_2, \vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, obtendo

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2\sqrt{s}P_a^*} \frac{\delta(E_a^* + E_b^* - \sqrt{P_1^{*2} + m_1^2} - \sqrt{P_1^{*2} + m_2^2})}{\sqrt{P_1^{*2} - m_1^2}\sqrt{P_1^{*2} - m_2^2}} d^3p_1^*. \quad (2.117)$$

como $d^3p_1^* = P_1^* dP_1^* d\Omega_1^*$ podemos escrever

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2\sqrt{s}P_a^*} \int_0^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(E_a^* + E_b^* - \sqrt{P_1^{*2} + m_1^2} - \sqrt{P_1^{*2} + m_2^2})}{\sqrt{P_1^{*2} - m_1^2}\sqrt{P_1^{*2} - m_2^2}} P_1^{*2} dP_1^* d\Omega^*. \quad (2.118)$$

Note que $\Omega^* \equiv \Omega_1^*$. A energia total E , pode ser escrita como $E = E_1^* + E_2^*$,

$$E = \sqrt{P_1^{*2} + m_1^2} + \sqrt{P_1^{*2} + m_2^2} +$$

então

$$dE = \frac{E_1^* + E_2^*}{E_1^* E_2^*} P_1^* dP_1^*,$$

ou seja

$$\frac{dP_1^*}{dE} = \frac{E_1^* E_2^*}{E_1^* + E_2^*} \frac{1}{P_1^*}. \quad (2.119)$$

A expressão (2.118) fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2\sqrt{s}P_a^*} \int_{m_1+m_2}^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(\sqrt{s} - E_1^* - E_2^*)}{E_1^* E_2^*} P_1^{*2} \frac{dP_1^*}{dE} dE. \quad (2.120)$$

e usando (2.119) temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2\sqrt{s}P_a^*} \int_{m_1+m_2}^\infty |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(\sqrt{s} - E)}{E} P_1^* dE. \quad (2.121)$$

e, se $E > m_1 = m + 2$ podemos integrar usando a função- δ , obtendo finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 \frac{P_1^*}{P_a^*}. \quad (2.122)$$

Em geral $|\mathcal{M}|^2$ depende dos 4-momentos mas, neste caso $\vec{p}_b = -\vec{p}_a$, $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$. Assim, depende apenas de \vec{p}_a e \vec{p}_1 (não estamos considerando o spin), então podemos ter os escalares $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_a = P_a^{*2}$, $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 = P_1^{*2}$, $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 = P_a^* P_1^* \cos \theta_{a1}$. Mas, como \vec{P}_a^* está fixo, as únicas variáveis de integração que $|\mathcal{M}|^2$ pode depender são P_1^* e $\cos \theta_{a1}$

A distribuição angular na Eq. (2.122) não é invariante. Podemos usar no entanto $d\sigma/dt$ que sim é invariante. Como definimos na Eq. (2.113),

$$t = m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2P_a P_1 \cos \theta_{a1},$$

$$\begin{aligned} dt &= 2P_a^* P_1^* d(\cos \theta_1) \\ &= \frac{1}{\pi} P_a^* P_1^* d\Omega_1^*, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{dt} \quad (2.123)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi s P_a^{*2}} \quad (2.124)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi \lambda(s; m_a^2, m_b^2)}. \quad (2.125)$$

A seção de choque total é dada por

$$\sigma(s) = \frac{1}{16\pi \lambda(s; m_a^2, m_b^2)} \int_{t^-}^{t^+} dt |A(s, t)|^2, \quad (2.126)$$

onde $A(s, t)$ é amplitude em função das variáveis s e t ; e $t^\pm = t^\pm(s, m_i^2)$ são os limites em t para s fixo, que serão determinados mais adiante. A seção de choque total do processo $A + B \rightarrow \text{qualquer coisa}$ é dada pelo teorema óptico em termos da amplitude de espalhamento para frente (“forward”) de um processo elástico com massas $\mu m \rightarrow \mu m$

$$\text{Im } A(s, t = 0) = \lambda^{\frac{1}{2}}(s; m^2, \mu^2) \sigma_T(s).$$

2.9.1 Decaimento de uma partícula em duas

No decaimento de uma partícula com duas partículas no estado final, usamos a notação que aparece na Fig. 8

$$E_1^* = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}$$

$$P_1^* = |\vec{p}_1^*| = \left[\frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A taxa de decaimento é

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{P_1^*}{M^2} d\Omega^*. \quad (2.127)$$

2.10 Variáveis de Mandelstam

A definição dos invariantes ou *variáveis de Mandelstam* para o processo $A + B \rightarrow 1 + 2$ (mostrados na Fig. 5) é:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 \\ &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (E_a^* + E_b^*)^2 \quad \text{SCM} \\ &= (E_1^* + E_2^*)^2 \quad \text{SCM} \\ &= m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a, \quad \text{SL} \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2P_1 P_2 \cos \theta_{12} \quad \text{SCM ou SL}; \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} t &= (p_a - p_1)^2 \\ &= (p_b - p_2)^2 \\ &= m_b^2 + m_2^2 - 2m_b E_2, \quad \text{SL} \\ &= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2P_a P_1 \cos \theta_{a1}, \quad \text{SCM ou SL} \end{aligned} \quad (2.129)$$

e

$$\begin{aligned} u &= (p_a - p_2)^2 \\ &= (p_b - p_1)^2 \\ &= m_b^2 + m_1^2 - 2m_b E_1, \quad \text{SL} \\ &= m_a^2 + m_2^2 - 2E_a E_2 + 2P_a P_2 \cos \theta_{a2}, \quad \text{SCM ou SL}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

A razão de introduzir as três variáveis dependentes está no conceito de *crossing*. O crossing é importante na dinâmica mas é trivial na cinemática. As variáveis s, t, u não são independentes dado que, por exemplo, no caso de

$A + B \rightarrow 1 + 2$, temos o vínculo: $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2$. Assim, vemos que as três variáveis definem um triângulo.

Até agora consideramos a reação $A + B \rightarrow 1 + 2$ assumindo que todas as energias eram positivas, $p = (E, \vec{p})$ com $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \geq m \geq 0$. Por outro lado, a conservação do 4-momento é, como uma relação analítica, válida se um dos 4-momentos é tipo tempo com componente temporal negativa, i.e., $p = (E, \vec{p})$ com $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Então podemos escrever de maneira alternativa a conservação do 4-momento $E \leq -m < 0$,

$$\begin{aligned} p_a + p_b &= p_1 + p_2 \\ p_a + (-p_1) &= (-p_b) + p_2 \\ p_a + (-p_2) &= p_1 + (-p_b). \end{aligned} \tag{2.131}$$

Na segunda linha de (2.131), p_1 e p_b têm energia negativa e na terceira, este é o caso para p_2 e p_b . Essas formas podem ser interpretadas como a conjugação do 4-momento para as seguintes reações

$$\begin{aligned} \text{canal-s} \quad p_a + p_b &\rightarrow p_1 + p_2, \\ \text{canal-t} \quad p_a + \bar{p}_1 &\rightarrow \bar{p}_b + p_2, \\ \text{canal-u} \quad p_a + p_2 &\rightarrow p_1 + \bar{p}_b, \end{aligned} \tag{2.132}$$

onde a barra indica a antipartícula respectiva. Agora todos os 4-momentos têm componentes temporais positivas. Do ponto de vista da cinemática não é necessário falar de antipartículas mas quando levarmos em conta a dinâmica, a conjugação partícula-antipartícula será feita quando passarmos uma partícula do estado inicial ao final e viceversa. Os três canais são rotulados pela variável que é positiva t e u são momentos transferidos invariantes. Por exemplo, no canal- s , t é sempre definido como $t = (p_a - p_1)^2$ mas no canal- t , p_1 tem E_1 negativa, logo no SCM $\vec{p}_a - \vec{p}_1 = \vec{p}_a + \vec{p}_1 = 0$, a energia disponível é

$$t = (E_a - E_1)^2 = (E_a + |E_1|)^2 \geq (m_a + m_1)^2.$$

Similarmente s e u são momentos transferidos no canal- t . Além dos 3 canais de espalhamento há os canais de decaimentos. Por exemplo, se $m_b > m_a + m_1 + m_2$, poderia ocorrer o decaimento

$$A \rightarrow \bar{B} + 1 + 2.$$

Há quatro possíveis canais de decaimento. Dinamicamente os vários canais podem ser completamente diferentes e, como assumimos que a amplitude de espalhamento é uma função *analítica*, podemos passar de um canal a outro.

2.10.1 Região Física em s, t, u

Quando a reação $A + B \rightarrow 1 + 2$ é descrita nas variáveis do SCM, E_1^*, θ_{a1}^* as quais têm um significado físico imediato, a região física do canal- s é determinada facilmente: $E_1^* \geq m_1$, $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq +1$. Isso quer dizer que a reação $A+B \rightarrow 1+2$ pode ser medida experimentalmente em qualquer ponto dessa região. O problema agora é mapear essa região no plano $s - t$. Isso depende dos valores das massas. Vamos considerar um exemplo específico. O caso geral pode ser encontrado em livros especializados. Consideremos o caso em que $m_a = m_1 = \mu$, e, $m_b = m_2 = m$ com $\mu \leq m$. Isso ocorre, por exemplo, no espalhamento elástico $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$. Vamos resumir, para este caso particular, as relações cinemáticas gerais dadas nas Eqs. (2.50) e (2.51):

$$\begin{aligned}
 E_a^* &= E_1^* \\
 &= (s + \mu^2 - m^2)/2\sqrt{s}, \\
 E_b^* &= E_2^*, \\
 &= (s - m^2 - \mu^2)/2\sqrt{s}, \\
 P_a^* &= P_b^* = P_1^* = P_2^* = P^*, \\
 &= \lambda^{\frac{1}{2}}(s; m^2, \mu^2)/2\sqrt{s},
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

para as energias e momentos, e

$$\cos \theta_{a1}^* = 1 + \frac{2st}{\lambda(s; m^2, \mu^2)} \tag{2.134}$$

para o ângulo de espalhamento θ_{a1}^* , ou

$$\begin{aligned}
 t &= -(1 - \cos \theta_{a1}^*)\lambda(s; m^2, \mu^2)/2s, \\
 &= -2P^{*2}(1 - \cos \theta_{a1}^*), \\
 &= -4P^{*2} \sin^2 \left(\frac{\theta_{a1}^*}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Para obter a relação entre u e $\cos \theta_{a1}^*$ usa-se a relação

$$s + t + u = 2m^2 + 2\mu^2,$$

se encontra que

$$u = \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s} - \frac{\lambda(s; m^2, \mu^2)}{2s} (1 + \cos \theta_{a1}^*). \tag{2.136}$$

Desta última segue que na direção para trás (“backward”)

$$u(\theta_{a1}^* = \pi) = \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s}$$

e na direção para frente

$$t(\theta_{a1}^* = 0) = 0.$$

A fronteira da região física pode ser obtida do requerimento que $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq +1$ na Eq. (2.134). O limite superior de t é obtido quando $\cos \theta_{a1}^* = 1$,

$$\begin{aligned} t &= 0, \\ u &= 2m^2 + 2\mu^2 - s, \end{aligned} \quad (2.137)$$

e o limite inferior quando $\cos \theta_{a1}^* = -1$,

$$\begin{aligned} t &= -\lambda(s; m^2, \mu^2)/s, \\ u &= (m^2 - \mu^2)^2/s. \end{aligned} \quad (2.138)$$

No plano $s - t$, as Eqs. (2.137) dão uma linha reta e as Eqs. (2.138) uma hipérbole com assíntotas

$$s = 0, \quad (2.139)$$

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad t = -s + 2m^2 + 2\mu^2, \quad (2.140)$$

As curvas (2.136) e (2.137) interceptam-se em $s = (m \pm \mu)^2$. O valor $s = (m + \mu)^2$ corresponde ao limiar ($P^* = 0$) da reação $A + B \rightarrow 1 + 2$. Para cada valor de s tal que $s \geq (m + \mu)^2$, a linha reta vertical entre as curvas corresponde ao intervalo completo de valores $-1 \leq \cos \theta_{a1}^* \leq +1$. A condição do limiar foi automaticamente incluída na Eq. (2.137). As mesmas equações (2.138) e (2.140) valem para a região física do canal u , $u \geq (m + \mu)^2$ e do canal- t , $t \geq (m + \mu)^2$. Um caso particular do anterior é $mm \rightarrow mm$, ou seja, quando as partículas iniciais A e B e as finais 1 e 2 tem todas a mesma massa. Essa seria a situação para $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$. Observe-se que neste caso

$$s = 4(P^{*2} + m^2), \quad t = -2P^{*2}(1 - \cos \theta^*), \quad u = -2P^{*2}(1 + \cos \theta^*), \quad (2.141)$$

onde $P^* = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ é o momento das partículas iniciais e finais, e θ^* é o ângulo de espalhamento no SCM. Veja que $A \equiv e^-$, $B = e^+$, $e^- \equiv 1$ e

$2 \equiv e^+$. É usual definir o canal- s como aquele da reação estudada, neste caso $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, vemos então que $s \geq 4m^2$, $t \leq 0$ e $u \leq 0$. Em particular, $t = 0$ para o espalhamento “forward” e $u = 0$ para o espalhamento “backward”. Note-se também que neste caso a reação relacionada pelo “crossing” $A\bar{2} \rightarrow 1\bar{B}$ corresponde a $e^-+e^- \rightarrow e^-+e^-$, e pode-se mostrar que $u = 4m^2$ (i.e., $u \rightarrow s$), $t \leq 0$ e $s \leq 0$ (i.e., $s \rightarrow u$).

2.11 Crossing no caso mais geral

Podemos classificar as reações (ou processos) em dois tipos. Uma reação *exclusiva* é aquela na qual todas as partículas e seus momentos são conhecidos. Ou seja, $A+B \rightarrow C+D+E$. As reações exclusivas podem ser *elásticas* quando não há criação de partículas, tipo $A+B \rightarrow A+B$; e *inelásticas* quando há criação de partículas, como no primeiro exemplo. Por outro lado, uma reação *inclusiva*, é aquela em que apenas uma das partículas do estado final é completamente identificada. Ou seja, que em $A+B \rightarrow C+X$ apenas C é identificada no estado final. Às vezes é usado também o caso semi-inclusivo, quando várias (pelo menos duas) partículas no estado final são detectadas mas outras não são, $A+B \rightarrow C+D+X$. Em uma reação exclusiva, o canal da reação está bem determinado enquanto que experimentos inclusivos envolvem a soma sobre diferentes canais exclusivos e multiplicidades. A mudança, realizada no final dos anos 1960, do estudo de processos exclusivos para inclusivos implicou numa virada na física de partículas elementares. Vamos considerar, por enquanto, apenas processos exclusivos que poderão ser decaimentos, $1 \rightarrow m$

$$A \longrightarrow 1 + 2 + \cdots + m, \quad (2.142)$$

ou colisões de duas partículas, $2 \rightarrow n$

$$A + B \longrightarrow 1 + 2 + \cdots + n. \quad (2.143)$$

No decaimento (2.142), das m variáveis $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$, o vínculo da conservação do 4-momento implica em $3m - 4$ variáveis independentes. Ainda no caso de spin zero, no sistema em repouso da partícula que decai, a orientação da configuração de momentos é irrelevante e isso deixa 3 variáveis triviais ficando $3m - 7$ variáveis independentes. Todas as massas m_0, m_1, \dots, m_m são consideradas fixas. De fato essa contagem vale para $m > 2$, o decaimento

de uma partícula sem spin em outras duas esta determinado pelas massas delas. Por outro lado, na reação (2.143) há $3n - 4$ variáveis independentes no estado final. A direção do feixe (de \vec{p}_a no SL ou no SCM) define a direção no espaço e há uma variável trivial ϕ que corresponde a uma rotação ao redor do eixo do feixe. Temos, então, neste caso $3n - 5$ variáveis independentes. Mas levando em conta na colisão o estado inicial, temos mais uma variável, o quadrado da energia, s , isto é, temos de novo apenas $3n - 4$ variáveis essenciais. Fazendo $m = n + 1$, $p_a = p_0$, e $p_b = -p_m$, as Eqs. (2.142) e (2.143) estão relacionadas por *crossing*, isto é, a reação (2.143) é obtida da (2.142) passando uma partícula do estado final ao estado inicial. Neste caso como o número total de variáveis essenciais é $3n - 4 = 3m - 7$, isto é, igual para (2.142) e (2.143) temos então uma relação entre a cinemática dos processos relacionados por *crossing*. Por exemplo, em termos de variáveis invariantes, as regiões físicas de dois de tais processos são dadas pela mesma equação e o fator de espaço de fase $\rho(E)$, é o mesmo para ambos. Por simplicidade, vamos considerar sempre apenas o caso de partículas sem spin. Em resumo, o espaço de fase dos processos $1 \rightarrow n$ e $2 \rightarrow n$, com $m_0^2 = s$, é a mesma região de dimensão $3n - 4$. Mas no caso $2 \rightarrow n$ há uma direção no espaço, que é a direção do feixe. É isso que significa dizer que processos, como $1 \rightarrow n + 1$ e $2 \rightarrow n$, estão relacionados por *crossing*.

2.12 Exercícios

Para os valores numéricos das diferentes constantes, h, c, m_e etc, usar os valores do PDG 2002 (disponível também em <http://pdg.lbl.gov>.)

1. Mostre que o momento p de uma partícula pode ser escrito como

$$cp = \sqrt{2E_0T + T^2},$$

onde E_0 é a energia de repouso.

2. Mostre que, para elétrons, podemos escrever o comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, como

$$\lambda_e = 1.23 \times 10^{-7} \left[T(\text{eV}) \left(1 + \frac{T(\text{eV})}{1.022 \times 10^6} \right) \right]^{-1/2} \text{ cm}$$

onde $T(\text{eV})$ é a energia cinética dos elétrons em eV.

3. Mostre que os comprimentos de onda para nêutrons térmicos e elétrons não-relativísticos são, respectivamente ($\lambda = \lambda/2\pi$),

$$\lambda_n \approx \frac{4.552 \times 10^{-10}}{T^{1/2}(\text{eV})} \text{ cm}$$

$$\lambda_e \approx \frac{1.23 \times 10^{-7}}{T^{1/2}(\text{eV})} \text{ cm}$$

onde $T(\text{eV})$, como no problema anterior, é a energia cinética em eV.

4. Assumindo, arbitrariamente, que uma partícula relativística é aquela que tem uma energia cinética que excede o “valor crítico” de $\gamma = 1.1$, calcule a energia cinética crítica para o fóton, neutrino, elétron e próton.
5. Mostre que

$$\tau = \tau_{\text{lab}} \frac{mc^2}{T + mc^2}$$

onde τ é a vida média no sistema em repouso da partícula. Calcule τ_{lab} para múons de 1 GeV.

6. Suponha que duas partículas tenham velocidades iguais, i.e., em magnitude e direção. Como se relacionam suas velocidades em outro referencial de Lorentz? O que acontece se em vez das velocidades usamos os 3-momentos?
7. Um feixe de elétrons de 10 GeV de energia e uma corrente de 10^{-8} ampère é dirigido numa área de 0.5 cm^2 . Qual é o fluxo F ?
8. Uma partícula se move com uma velocidade u com relação ao referencial S . Num referencial S' com velocidade v relativa ao referencial S , a partícula tem velocidade u' . Mostre que

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v) \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)$$

9. Verifique as Eqs. (2.44)
10. Qual é a energia total $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{(p_1^2 + p_2^2)^2}$ de um próton com uma energia de 1 TeV colidindo com um próton em repouso? Qual a energia total numa colisão de dois prótons em um anel de colisão onde cada próton possui 1 TeV de energia?
11. Uma partícula em repouso de massa M decai em duas partículas iguais de massa m . Calcule a velocidade das partículas no produto e use resultados numéricos para $\rho \rightarrow \pi\pi$.
12. No LEP, os elétrons são acelerados a energias de, digamos, 50 GeV. Quanto se afasta a sua velocidade da velocidade da luz?
13. A energia total no SCM é importante porque é ela que determina a energia disponível para a produção de partículas. Mostre que a reação

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

pode ocorrer se a energia do próton incidente (no sistema de laboratório) E_{min} é

$$E \geq E_{min} = 6.6 \text{ GeV}.$$

Essa energia é chamada *energia limiar* da reação. Calcule a energia limiar das seguintes reações: a) $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$; b) $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$; c) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$; d) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+$; e)

$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$; f) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$; g) $K^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+$. Assuma $m_p = m_n$ para ter apenas uma estimativa dessa energia no caso que a reação envolva p e n , como no caso a).

14. Se uma partícula a decai em repouso em duas, $b + c$. Neste caso $m_a = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2} + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_c^2}$. Assim se $|\vec{p}|$ é pequeno, uma medida deste fornece a massa de a se m_b e m_c forem bem conhecidas. Definamos o fator Q que representa a energia liberada do decaimento como a diferença de massa entre a e b e c :

$$Q = m_a - m_b - m_c = |\vec{p}|^2 \left(\frac{1}{m_b + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2}} + \frac{1}{m_c + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_c^2}} \right).$$

Note que quando $|\vec{p}| \ll m_{b,c}$, $Q \approx \sum_i |\vec{p}|^2 / 2m_i$. Se, em vez de momento mede-se a energia cinética de uma das partículas, por exemplo a b , com energia cinética definida

$$T_b = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2} - m_b = \frac{|\vec{p}|^2}{m_b + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2}}$$

podemos escrever:

$$Q = T_b \left(1 + \frac{T_b + m_b}{m_c + \sqrt{T_b^2 + 2T_b m_b + m_c^2}} \right).$$

Verifique as expressões anteriores.

15. Considere a reação $A + B \rightarrow C + D$, e numa situação em que A e B estão em repouso (pode parecer estranho, mas os experimentais conseguem). Mostre que

$$m_d = (m_a + m_b - m_c)\sqrt{1 - \delta},$$

onde

$$\delta = \frac{2(m_a + m_b)}{m_a + m_b - m_c} T_c = \frac{2(m_a + m_b)}{(m_a + m_b - m_c)^2} \frac{|\vec{p}|^2}{m_c + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_c^2}}.$$

Quando $m_c \simeq m_a$, ou $m_c \simeq m_b$, esse processo serve para medir a diferença de massas $m_d - m_b$. Verifique que

$$m_d - m_b = (m_a - m_c)\sqrt{1 - \delta} - \frac{m_b \delta}{1 + \sqrt{1 - \delta}}.$$

16. Considere um feixe de partículas B (que seria o feixe) incidindo num alvo A , dando produtos P (notação diferente da usada até agora). A notação de energia-momento é

$$B(E_b, \vec{P}_b) + A(m_a c^2, \vec{0}) \rightarrow P(E, \vec{Q}) + \dots$$

onde \dots denota quaisquer outras partículas. Sem perder a generalidade, podemos sempre assumir que

$$\vec{P}_b = (P_b, 0, 0), \quad \vec{Q} = (Q \cos \theta, Q \sin \theta, 0).$$

(onde $|\vec{P}_b| \equiv P_b$ etc.) Determine a) a velocidade v que relaciona o sistema de laboratório com o SCM neste caso particular. b) a tangente do ângulo de espalhamento

$$\tan \theta = \frac{Q^* \sin \theta^*}{\gamma(v) \left(Q^* \cos \theta^* + \frac{v E'}{c^2} \right)} \quad (2.144)$$

onde $E^* = (m_P^2 c^4 + q'^2 c^2)^{1/2}$ é a energia do produto no SCM. Interprete o resultado (2.144) para altas energias. De fato, mostre que para altas energias

$$\tan \theta \approx \left(\frac{2m_a c}{P} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{v \cos \theta^*}{v \cos \theta^* + c}$$

17. Quando uma partícula relativista decai, os produtos de decaimento emergem predominantemente num ângulo pequeno θ ao redor da direção original do feixe. Verifique de fato que

$$\tan \theta \approx \frac{m_d c}{\sqrt{2} E} \frac{v \sin \theta^*}{v \cos \theta^* + c}$$

onde usamos a notação $d(E_d, \vec{P}_d) \rightarrow P(E, \vec{Q}) + \dots$, com

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}| |\vec{Q}| \cos \theta.$$

18. Derive para o decaimento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_{\nu_\mu}^2) c^2}{2m_\pi}$$

19. Mostre que para uma partícula de massa m , que decai em dois fótons, o ângulo entre as direções dos fótons está dado por

$$\cos \theta = 1 - \frac{m^2 c^4}{2E_1 E_2}$$

sendo $E_{1,2}$ as energias dos fótons. Use valores típicos dos decaimentos do π^0 e η^0 .

20. Uma partícula neutra X^0 decai em duas partículas carregadas A^+ e B^- . As componentes dos momentos dos produtos em GeV/c medidos são

	p_x	p_y	p_z	
A^+	-0.488	-0.018	2.109	(2.145)
B^-	-0.255	-0.050	0.486	

Este decaimento é $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ou $\Lambda \rightarrow p \pi^-$?

21. Mostre que o ângulo de espalhamento entre as partículas A e 1, no processo $A + B \rightarrow 1 + 2$ no SCM é

$$\begin{aligned} \cos \theta_{a1}^* &= \frac{(t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_a^* E_1^*)}{2P_a^* P_1^*} \\ &= \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_1^2 - m_2^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_1^2 - m_2^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)}, \end{aligned} \quad (2.146)$$

onde $t = (p_a - p_1)^2$, e no SL

$$\cos \theta_{a1} = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)(m_b^2 + m_1^2 - u) + 2m_b^2(t - m_a^2 - m_1^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{\frac{1}{2}}(u, m_b^2, m_1^2)}, \quad (2.147)$$

onde $u = (p_a - p_2)^2$.

Capítulo 3

SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

3.1 Generalidades

Em física clássica as simetrias foram usadas apenas para simplificar a solução de problemas. Já no Sec. XX, as simetrias foram usadas em física atômica, nuclear e, depois, em física de partículas elementares. Nesta área, em alguns casos como nas interações fortes as simetrias unitárias permitiram a classificação das partículas conhecidas na época. Mas a dinâmica continuava desconhecida. Até o início dos anos 70 não eram conhecidas as leis que regem a sua dinâmica. No entanto, na década de 1960 ficou claro que as simetrias *locais* eram justamente o que determinava a dinâmica das partículas elementares.¹ Independente disso, as simetrias são importantes pela beleza e simplicidade com que permitem tratar uma diversidade de fenômenos. Segundo este último ponto de vista, as previsões de uma dada teoria, podem ser classificadas segundo os detalhes da dinâmica ou das propriedades de invariância da teoria.

Independente de modelos, as leis de conservação e invariâncias de simetrias *globais* impõem vínculos nas possíveis formas das interações, e fornecem também relações entre as seções de choque de alguns processos.

Alguns exemplos bem conhecidos de invariâncias e suas consequências são:

¹Em 1928 H. Weyl mostrou que a existência do campo eletromagnético e sua interação com a matéria (partículas carregadas) é uma consequência de impor uma simetria $U(1)$ local.

a invariância sobre translações espaciais, que implica na conservação do momento linear; a invariância sob translações temporais implica na conservação da energia, e no caso da invariância sob rotações temos a conservação do momento angular. Esse tipo de relação pode ser mostrada, e generalizada, pelo *Teorema de Noether*, mas fica fora do nosso contexto.

É interessante que as leis de conservação mencionadas são válidas tanto em mecânica clássica como na quântica (ainda que algumas simetrias são quebradas em nível quântico mas não vamos considerar isso aqui). Isto é, aquelas simetrias são leis da natureza válidas para toda as interações. Por outro lado, nas interações fortes nos hádrons aparecem simetrias unitárias globais, além de simetrias de fase como o número bariônico ou, nos léptons, os números leptônicos de família. Veremos, mais adiante, como isso foi incorporado de maneira automática, no modelo padrão.

As simetrias podem ser classificadas segundo o espaço em que operem como: simetrias internas e simetrias espaço-temporais. As primeiras atuam em espaços abstratos nos graus de liberdades das partículas. As segundas tem a ver com transformações do espaço-tempo, por exemplo o grupo de Poincaré. As simetrias internas podem ser de dois tipos *simetrias contínuas* ou *simetrias discretas*. As simetrias contínuas podem ser de dois tipos segundo o efeito de suas transformações sejam os mesmos no universo todo ou se diferem em cada ponto do espaço-tempo. Neste último caso diz-se que são *simetrias de gauge* ou *simetrias locais*.

3.2 Simetrias Unitárias em Mecânica Quântica

Consideremos o assunto no contexto da mecânica quântica. O valor esperado de um observável F , no estado $|\psi(t)\rangle$ é denotado por $\langle\psi(t)|F|\psi(t)\rangle \equiv \langle F\rangle$. Este valor esperado não depende do tempo se,

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = [H, F] = 0, \quad (3.1)$$

assumindo que F não dependa explicitamente de t . Por outro lado, uma operação de simetria está representada por um operador unitário, U ,

$$|\psi(t)\rangle' = U|\psi(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Se U é uma simetria do sistema e $|\psi\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (3.3)$$

também $|\psi(t)\rangle'$ satisfaz essa equação. Usando a Eq. (3.2) e multiplicando à esquerda por U^\dagger podemos escrever

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = U^\dagger H U |\psi(t)\rangle. \quad (3.4)$$

Das Eqs. (3.3) e (3.4), e assumindo que U não depende explicitamente de t ,

$$H = U^\dagger H U, \quad (3.5)$$

isto é,

$$[H, U] = 0. \quad (3.6)$$

Se U é um operador hermitiano então é (ou melhor, pode ser) um observável. Se não é hermitiano, sempre podemos definir um operador relacionado com U que seja hermitiano e que satisfaça a Eq. (3.1). Os vetores de (3.2) na representação das coordenadas $\langle \vec{r} | \psi \rangle'$ e $\langle \vec{r} | \psi \rangle$ estão avaliadas no mesmo ponto do espaço-tempo.

Em geral, os operadores de transformações não são hermitianos. Existem transformações *contínuas* e *discretas*. Nestas últimas, os operadores são simultaneamente unitários e hermitianos. Um exemplo de transformação discreta é a inversão espacial:

$$U : \quad \vec{x} \rightarrow -\vec{x},$$

e é evidente que

$$U^2 = 1,$$

logo U neste caso é hermitiana e unitária.

Um exemplo de transformações contínuas é a transformação de fase, $\psi' = U\psi$, onde o operador U é

$$U = e^{i\alpha Q} \simeq 1 + i\alpha Q, \quad \alpha \ll 1, \quad (3.7)$$

e temos que $U^\dagger U = 1$ se $Q^\dagger = Q$. Isto é, o operador Q é o operador hermitiano relacionado com U no caso das transformações de fase. Então, os autovalores do operador (de carga) Q são observáveis e conservados. Se $[H, U] = 0$, isto é, se U é um operador de simetria

$$HU - UH = H(1 + i\alpha Q) - (1 + i\alpha Q)H = 0,$$

isto é,

$$[H, Q] = 0. \quad (3.8)$$

O “gerador” Q é um operador hermitiano que é observável se U é uma simetria.

A invariância sob uma transformação contínua leva a leis de conservação *aditivas*. No caso de transformações discretas as leis de conservação resultantes são *multiplicativas*. Ver mais sobre essas diferenças na Sec. 3.9.2.

Vemos então que, quando o sistema é invariante sob alguma transformação, esta transformação deixa a Hamiltoniana do sistema invariante. No entanto, em geral esta é apenas uma condição suficiente: se a Hamiltoniana do sistema é invariante sob uma transformação, então o sistema é invariante. Porém existem sistemas aos quais não está associado uma Hamiltoniana. Assim, a condição acima não é necessária. Por outro lado, quando incluímos o campo eletromagnético podemos fazer uma transformação de gauge nos potenciais vetoriais. O sistema físico permanece invariante mas não a Hamiltoniana.

3.3 Conservação da Carga Elétrica

Por que o seguinte decaimento

$$e^- \rightarrow \nu + \gamma. \quad (3.9)$$

não poderia ocorrer na natureza?

Caso esse decaimento acontecesse poderia ser observado experimentalmente ao detectar os raios-X emitidos quando um elétron decai a um nível de energia mais baixo e emitindo também um neutrino. A não observação desse processo (e dados astrofísicos) implica que ²

$$\tau_e > 4.6 \times 10^{26} \text{ anos }^3,$$

onde τ_e é a vida média do elétron se ele decaísse segundo este processo (o valor de τ_e pela “desaparição” do elétron é: 6.4×10^{24} anos). É interessante que se parametrizamos a interação que é “charge nonconserving” (CNC), que produz o decaimento $e \rightarrow \gamma + \nu$ como

$$\mathcal{L}_{\text{CNC}} = \frac{1}{2} e \epsilon_{\nu\gamma} \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \Psi_\nu A^\mu + H.c., \quad (3.10)$$

²Todos os valores citados neste capítulo são de J. Beringer, et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 1 (2012).

³H. O. Bock, *et al*, Searching for electron decay mode $e \rightarrow \gamma + \nu$ with prototype of Borexino Detector, Phys. Lett. **B525**, 29 (2002).

onde o parâmetro que controla a interação é $\epsilon_{e\nu\gamma}$. Dados recentes implicam ⁴ que $\epsilon_{e\nu\gamma} < 1.44 \times 10^{-97}$ (90% c.l). ⁵

Expressamos a conservação da carga elétrica, que é um número quântico aditivo, como

$$\sum Q_{\text{inicial}} = \sum Q_{\text{final}}. \quad (3.11)$$

Isto é, a soma das cargas no estado inicial é igual à soma das cargas no estado final. Ou, também da seguinte forma:

$$\sum Q - \sum \bar{Q} = \text{constante}, \quad (3.12)$$

ou seja, a diferença da carga das partículas e antipartículas deve ser uma constante.

Por outro lado, sabemos que, desde a experiência de Millikan, a carga é quantizada:

$$Q = ne \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que implica em

$$Q_{\text{nêutron}} = 0, \quad Q_{\text{próton}} = -Q_{\text{elétron}}.$$

Experimentalmente obtém-se os seguintes dados: [Pdg12]

$$\begin{aligned} Q_{\text{nêutron}} &= (-0.2 \pm 0.8) \times 10^{-21} e, \\ |Q_{e^-} + Q_{\text{próton}}| &< 1.0 \times 10^{-21} e \\ |Q_{e^-} + Q_{e^+}| &< 4 \times 10^{-8} e \\ |Q_{\text{próton}} + Q_{\text{antipróton}}| &< 2 \times 10^{-9} e \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde, na última linha, assume-se que $Q_n = Q_p + Q_e$. Resultados mais recentes feitos no decaimento $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ indicam que a carga elétrica é conservada:

$$\frac{B.R.(n \rightarrow p\nu_e\bar{\nu}_e)}{B.R.(n \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e)} < 8 \times 10^{-27}.$$

⁴H. V. Klapdor-Kleingrothaus, I. V. Krivosheina, e I. V. Titkova, *A new experimental limit for the stability of the electron*, Phys. Letts. **B664**, 109 (2002).

⁵Não é possível ter uma teoria autoconsistente e não contraditória que descreva a não conservação da carga. Ver tentativas: L. B. Okun e J. Zeldovich, *Paradoxes Of Unstable Electron* Phys. Lett. **78B**, 597 (1978); L. B. Okun e M. B. Voloshin, *On The Electric Charge Conservation*, JETP Letters **48**, 145 (1978); M. Susuki, *Slightly massive photon*, Phys. Rev. D **38**, 1544 (1988); S. Nussinov, *Charge-Nonconserving Decays*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2401 (1987); R. Mohapatra, *Possible nonconservation of electric charge*, Phys. Rev. Lett. **59**, 1510 (1987).

É interessante notar que a relação entre a conservação da carga elétrica e a invariância de fase global não está no mesmo nível que a conservação de outras grandezas como a energia, e os momentos linear e angular. Estes últimos, estão relacionados com a invariância sob translações espaço-temporais e rotações, respectivamente, via o teorema de Noether. No argumento anterior não distinguimos entre a conservação da carga elétrica e outras cargas, tipo os números bariônico ou leptônico. Para dizermos que estamos realmente considerando a carga elétrica, devemos introduzir o campo eletromagnético, o que implica na invariância sob transformações de gauge locais. Acontece que para uma teoria Abeliã a carga de Noether é igual nos dois casos.

Consideremos um caso eletrostático. Uma partícula de massa m e carga elétrica q sujeita a um campo elétrico estático \vec{E} definido por um potencial escalar A_0 . A hamiltoniana de é

$$H = H_0 + qA_0 \quad (3.14)$$

onde $H_0 = \vec{p}^2/2m = -\hbar^2\nabla^2/2m$. Sabemos que \vec{E} e \vec{B} são invariantes sob as transformações de gauge

$$A'_0 = A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial\theta(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\theta(t, \vec{x}) \quad (3.15)$$

onde $\theta(t, \vec{r})$ é uma função arbitrária dos seus argumentos.

Seja

$$|\psi\rangle' = e^{i\alpha(t, \vec{x})Q}|\psi\rangle. \quad (3.16)$$

No caso eletrostático $\theta = \theta(t)$ e $\alpha = \alpha(t)$.

Se o sistema é invariante sob as transformações (3.15) e (3.16) então a eq. de Schrödinger deve ser invariante sob essas transformações

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle' = (H_0 + qA'_0)|\psi\rangle'. \quad (3.17)$$

onde os campos com linha são definidos por (3.15) e (3.16). Após certa álgebra obtemos

$$\hbar Q \frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} |\psi\rangle = \frac{q}{c} \frac{\partial\theta(t)}{\partial t} |\psi\rangle, \quad (3.18)$$

e se $\theta(t) = \hbar c \alpha(t)$ então $Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$. Ou seja,

$$|\psi\rangle' = e^{i\alpha t q} |\psi\rangle. \quad (3.19)$$

Então as funções $\theta(t)$ em (3.15), e $\alpha(t)$ em (3.16) são proporcionais, e iguais, em unidades naturais $\hbar = c = 1$. E as funções $\psi'(t) = \langle x|\psi\rangle'$ e $\psi(t) = \langle x|\psi\rangle$ diferem apenas por uma fase local. Neste caso a partícula estava num potencial estático e por isso a funções α depende apenas do tempo, t . O caso mais geral onde há uma dependência nas coordenadas espaciais será estudado mais adiante.

Eugene Wigner colocou o seguinte argumento sobre a conservação da carga elétrica: suponhamos que podemos criar cargas elétricas de alguma maneira num sistema fechado, e que isto ocorre numa caixa com um potencial, V . Para criar a carga Q é necessária uma certa quantidade de energia E . Como nenhuma quantidade física pode depender do potencial, a energia E gasta na criação da carga não depende do potencial V . Depois, movemos o sistema fechado para uma outra caixa na qual o potencial é V' , e realizamos para isso uma quantidade de trabalho, $W = Q(V - V')$. Se agora destruirmos a carga, ganhamos a mesma quantidade de energia gasta inicialmente para criá-la. No entanto, temos ganho (ou perdido) uma quantidade de trabalho W . Isto contradiz a primeira lei da termodinâmica. Logo uma das suposições está errada: a que podemos criar cargas elétricas ou a que diz que as quantidades físicas não dependem do potencial. Escolhe-se a primeira. Invertendo o argumento, considera-se que isto mostra a relação entre a não dependência das quantidades físicas com o potencial (invariância de gauge local, $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta(x)$) e a conservação da carga. De qualquer maneira, é menos convincente que o caso da conservação da energia, \vec{p} e \vec{L} .

3.4 O Número Bariônico

Apenas a conservação da carga elétrica e das quantidades E, \vec{p} e \vec{L} , não impede que certos decaimentos não ocorram na natureza. Por exemplo,

$$p \rightarrow e^+ + \gamma, \quad (3.20)$$

não viola nenhuma das leis de conservação acima referidas. Em 1938, E. C. G. Stueckelberg sugeriu a conservação do número total de núcleons, que hoje é conhecido como “número bariônico”, pois é aplicável não apenas aos núcleons mas a todos os bárions. Atribuímos um número bariônico $B = +1$ ao próton e ao nêutron e $B = -1$, ao antipróton e ao antinêutron. Após a descoberta dos outros bárions, $B = +1$ para $\Lambda^0, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{-,0}$; $B = -1$ para

as antipartículas respectivas; $B = 0$ para mésons como $\pi's, K's$ e os léptons. Expressamos a lei de conservação do número bariônico B como,

$$\sum B_{\text{inicial}} = \sum B_{\text{final}}, \quad (3.21)$$

ou também

$$\sum B - \sum \bar{B} = \text{constante}, \quad (3.22)$$

ou seja, que a diferença entre o número de bárions e antibárions é constante. Ainda que os nêutrons livres decaiam segundo $n \rightarrow pe^- \nu$, os nêutrons nos núcleos são estáveis, menos nos núcleos radiativos mas, mesmo neste caso as vidas médias são, em geral, maiores que no caso livre. Por outro lado, os prótons são sempre estáveis (até agora!) e os antibárions nunca são criados sozinhos. Por exemplo, para criar um antipróton \bar{p} , devemos criar um próton também ou um nêutron ou um Λ, \dots isto é, devemos ter processos como

$$p + p \rightarrow p + p + \bar{p} + p$$

$$\pi^- + p \rightarrow p + \bar{p} + \Lambda^0 + K^0.$$

Uma das características de teorias de grande unificação (GUT pela sigla em Inglês) é que prevêm o decaimento do próton e outros processo que violam o número bariônico. Por exemplo, na teoria $SU(5)$ o decaimento principal do próton é $p \rightarrow e^+ \pi^0$. Já na teoria $SU(5)$ -supersimétrica implica a existência de decaimentos como

$$p \rightarrow \nu K^+ (\mu^+ K^0), \quad n \rightarrow \nu K^0.$$

Temos em modelos intermediários, como o de Pati-Salam, os seguintes modos,

$$p \rightarrow l^+ l^- l^+, \quad n \rightarrow l^+ l^- l^+ X.$$

Experimentalmente é preferível um modo de decaimento que não envolva neutrinos pois, neste caso, a energia medida deve coincidir com a massa do próton e a soma de todos os momentos deve ser zero. Os resultados experimentais dão os valores seguintes:

$$\tau_{(p \rightarrow e^+ \pi^0)} > 8.2 \times 10^{33} \text{ anos}, \quad (3.23)$$

e

$$\tau_{(p \rightarrow K^+ \bar{\nu})} > 1.5 \times 10^{32} \text{ anos}. \quad (3.24)$$

O resultado (3.23), mesmo com dados mais antigos, descartou o modelo $SU(5)$, que previa uma vida média de $\tau_p = 10^{29 \pm 2}$ anos; e o (3.24) coloca fortes vínculos no $SU(5)$ supersimétrico.

Para o nêutron poderíamos ter efeitos $|\Delta B| = 2$ como a oscilação $n \leftrightarrow \bar{n}$ com um tempo médio de oscilação de $> 8.6 \times 10^7$ s, para o caso de nêutrons livres e, $> 1.3 \times 10^8$ s, para nêutrons ligados nos núcleos. Um limite menos restritivo para a vida média do próton é aquele que não depende do modo de decaimento: $\tau_P(p \rightarrow \text{invisível}) > 21. \times 10^{29}$ anos.

A conservação do número bariônico está relacionada à uma simetria global $U(1)_B$, ou seja, que a Eq. (3.21) é uma consequência da invariância da teoria sob transformações

$$\psi' = e^{i\alpha B}\psi, \quad (3.25)$$

onde α é uma constante. Entretanto, podemos perguntar: existe a invariância sob transformações locais? Isto é

$$\psi' = e^{i\alpha(x)B}\psi. \quad (3.26)$$

Neste caso, devemos introduzir um bóson vetorial, B_μ , análogo ao fóton, A_μ .

T. D. Lee e C. N. Yang, num trabalho clássico,⁶ analisaram esta questão. Se B_μ é de massa zero como o fóton, haverá uma repulsão tipo-Coulomb entre bárions, e atração entre um bárion e um antibárion. Sendo e_B a “carga bariônica”, a força de longo alcance entre dois corpos será

$$F = -\frac{GM_1M_2}{r^2} + \frac{e_B^2}{4\pi} \frac{B_1B_2}{r^2}. \quad (3.27)$$

O primeiro termo na Eq. (3.27) é a contribuição da força gravitacional, o segundo termo é a contribuição de B_μ . B_1 e B_2 são o número bariônico dos corpos 1 e 2, respectivamente (isto é, o número de núcleons para o caso da matéria usual). Em M_1 e M_2 estão incluídas as energias de ligação entre o próton e o nêutron. A razão $1/X = M_{\text{núcleo}}/BM_p$, com B o número de núcleons no núcleo em questão, varia de uma substância para outra e logo, a Eq. (3.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F &= -\frac{G}{r^2}M_1M_2 \left(1 - \frac{e_B^2}{4\pi} \frac{B_1B_2}{GM_1M_2}\right) \\ &= -\frac{G}{r^2}M_1M_2 \left(1 - \frac{e_B^2}{4\pi} \frac{X_1X_2}{GM_p^2}\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

⁶T. D. Lee e C. N. Yang, *Conservation of Heavy Particles and Generalized Gauge Transformations*, Phys. Rev. **98**, 1501(1955).

Usualmente $X_1 X_2 \sim 10^{-3}$. Então, a razão, entre a massa gravitacional “observada” e a massa inercial varia como

$$10^{-3} \frac{e_B^2/4\pi}{GM_P^2}. \quad (3.29)$$

A experiência de Eötvos implica que a (3.29) é menor que 10^{-9} , logo

$$\frac{e_B^2/4\pi}{GM_P^2} < 10^{-5}, \quad (3.30)$$

o que implica que, caso B_μ exista, seu acoplamento seria ainda mais fraco que o do campo gravitacional, que por sua vez já é desprezível nos experimentos de física de partículas elementares nos laboratórios terrestres.

Vimos acima que uma maneira de testar a Eq. (3.21) (a física é uma ciência experimental!) é medir a vida média do núcleon. Isso tem sido feito pelos físicos experimentais ao longo das últimas 4 décadas, independentemente dos preconceitos teóricos vigentes. Por exemplo, se o núcleon decaísse seria liberado calor e esse fluxo de calor poderia ser usado para determinar a sua vida média. Mede-se o fluxo de calor proveniente do interior da Terra, subtraindo-se a contribuição dos elementos radioativos conhecidos, e obtém-se uma vida média $> 10^{20}$ anos. Já em 1965, experimentos “underground” forneciam o valor $\tau_p > 10^{28}$ anos. Recentemente as teorias de grande unificação fizeram com que o interesse por esse tipo de experimentos aumentasse. Por outro lado, também, já em 1967, A. Zakharov sugeriu a violação do número bariônico como um dos requisitos para explicar a razão observada entre bárions e fótons, $n_B/n_\gamma \sim 10^{-9}$, e entre bárions e antibárions, $n_B \gg n_{\bar{B}}$, de origem cosmológica.

3.5 O Número Leptônico

O número leptônico foi introduzido em 1953 por Konopinski e Mahmoud,⁷ num contexto onde os léptons eram apenas três: o elétron e^- , o múon positivo μ^+ e um neutrino, e as respectivas antipartículas (antiléptons). O neutrino tinha de ser um férmion de Dirac. Hoje são necessários três tipos de números leptônicos, um para cada família L_a , $a = e, \mu, \tau$. Atribuímos às partículas

⁷E. J. Konopinski e H.M. Mahmoud, *The Universal Fermi Interaction*, Phys. Rev. **92**, 1045 (1953).

números leptônicos com valores +1 para os léptons de cada geração (−1 para os respectivos antiléptons), e 0 para os outros léptons, hadrons (quarks) e o fóton.

Como nos casos anteriores, expressamos a conservação do número leptônico L (não confundir com o momento angular orbital). Na prática sempre é possível distinguir de qual estamos falando) como uma lei de conservação aditiva ⁸

$$\sum L_a \text{ inicial} = \sum L_a \text{ final}, \quad (3.31)$$

i.e., o número leptônico de família L_a no estado inicial e no final devem ser iguais, ou

$$\sum L_a - \sum \bar{L}_a = \text{constante}, \quad (3.32)$$

ou seja, em uma reação, o número de léptons de uma família deve ser igual ao número de antiléptons da família respectiva em cada aldo da reação.

O número leptônico total $L = \sum L_a$ também é conservado. Atualmente, como os neutrinos são partículas com massa, há violação dos números leptônicos de família, L_a , dado que as interações com os respectivos léptons carregados não são diagonais (consideraremos isso mais adiante). No entanto o número leptônico total L é conservado. O único processo que evidenciaria a violação de L seria o duplo decaimento beta sem neutrinos $nn \rightarrow e^-e^-$, do qual falaremos oportunamente.

Como se chegou a este esquema? Consideremos o caso do número leptônico do elétron, L_e . Suponhamos que o elétron é um lépton, e não um antilépton. A evidência da conservação desse número quântico vem das reações com neutrinos. Atribuímos então $L_e = +1$ ao elétron e seu neutrino, o pósitron e^+ e o antineutrino devem então ter $L_e = -1$, pois são antiléptons. Os outros léptons carregados μ , τ e seus respectivos neutrinos têm $L_e = 0$. Adiantamos que as antipartículas devem ter os números quânticos aditivos com sinal trocado, relativos aos das respectivas partículas.

Consideremos a captura do $\bar{\nu}_e$,

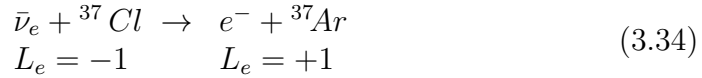
$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n, \quad (3.33)$$

que evidentemente conserva o número leptônico L_e como foi definido acima.

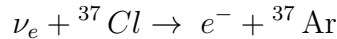
⁸A possibilidade de um número quântico multiplicativo não é incompatível com a experiência, a diferença está em eventos exóticos que ainda não foram observados. Aqui seguiremos a ortodoxia. Além disso, o número leptônico aditivo no contexto do modelo padrão é conservado *automaticamente* (no sentido a ser explicado mais adiante).

A reação (3.33) é consistente com $n \rightarrow e^- + p + \bar{\nu}_e$ mas, $\bar{\nu}_e + n \rightarrow e^- + p$ $\nu_e + p \rightarrow e^+ + n$, são ambas proibidas pela conservação do número leptônico.

Em 1955, R. Davis procurou detectar a reação (do tipo $\bar{\nu}_e n \rightarrow e^- p$)



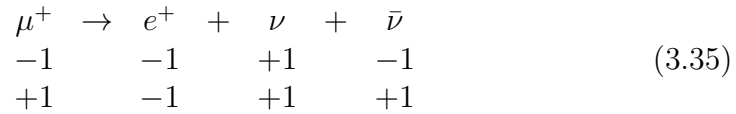
sem sucesso. Isso foi interpretado como indicando que $\bar{\nu}_e \neq \nu_e$. No entanto, a reação



é possível, e de fato, é usada na detecção dos neutrinos provenientes do Sol. Estes resultados foram, desde então, usados em vários experimentos incluindo o experimento de Davis com neutrinos solares.

A conservação de L_e implica que no decaimento- β o que acompanha o elétron é o anti-neutrino, $\bar{\nu}_e$. Então $L_e(\bar{\nu}_e) = -1$ ou $L_e(\nu_e) = +1$.

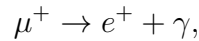
O esquema anterior está baseado na intuição, a extensão a outras partículas deve ser feita de maneira consistente e confrontada com os dados experimentais. Por exemplo, assumindo que o múon poderia ter uma atribuição de L_e , qual é o número leptônico do μ^+ ? Este decai principalmente em e^+ e dois neutrinos. Em princípio poderíamos ter duas opções:



Podemos assumir a seguinte atribuição de números leptônicos:

$$L_e(e^-, \mu^-, \nu_e, \nu_\mu) = +1.$$

Mas, se o caso fosse apenas este, o decaimento



seria permitido. Experimentalmente encontra-se que

$$\frac{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma)}{\Gamma(\mu^+ \rightarrow \text{tudo})} < 1.2 \times 10^{-11}, \quad \frac{\Gamma(\mu \rightarrow 3e)}{\Gamma(\mu \rightarrow \text{tudo})} < 1.0 \times 10^{-12}, \quad (3.36)$$

que estão entre os menores números medidos na física de partículas elementares.

A maneira mais simples de se explicar isso é a introdução de uma nova lei de conservação. Assumindo que existe um outro número quântico, aditivo diferente do número leptônico do elétron introduzido acima, este último passa a se chamar *número leptônico do elétron*, L_e . O novo número quântico será chamado de *número leptônico do múon*, L_μ . Podemos então rearranjar a atribuição destes dois números quânticos assim: $L_e(e^-) = +1$, $L_e(e^+) = -1$, $L_e(\mu^-, \mu^+) = 0$, $L_\mu(\mu^-) = +1$, $L_\mu(\mu^+) = -1$ e, finalmente, $L_\mu(e^-, e^+) = 0$. E os neutrinos? Para estender este esquema aos neutrinos, consideremos os decaimentos

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad (3.37)$$

e

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \quad (3.38)$$

Se atribuímos aos píons $L_\mu(\pi^\pm) = 0$, considerando a escolha já feita para os muons acima, i.e., $L_\mu(\mu^-) = -L_\mu(\mu^+) = 1$, que $L_\mu(\nu_\mu) = +1$ e $L_\mu(\bar{\nu}_\mu) = -1$, e com $L_\mu(\nu_e, \bar{\nu}_e) = 0$ e $L_e(\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) = 0$, obtemos consistência com os processos (3.37) e (3.38), ambos são permitidos.

No entanto, a introdução de L_μ deve, além de explicar a ausência do decaimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$, fazer algumas previsões. Consideremos, por exemplo,

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p, \quad (3.39)$$

e,

$$\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p. \quad (3.40)$$

Se L_μ é conservado, apenas a primeira reação deve ocorrer, não a segunda. Em 1962, L. Lederman e colaboradores encontraram evidências de que realmente o segundo processo não é observado e, logo, *devem* existir dois tipos de neutrinos: tipo- e e tipo- μ .⁹

Em 1975, M. Perl descobriu um novo tipo de lépton na reação

$$e^- + e^+ \rightarrow \tau^- + \tau^+, \quad (3.41)$$

com

$$\frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \mu^- \gamma)}{\Gamma(\tau^+ \rightarrow \text{tudo})} < 1.9 \times 10^{-8}; \quad \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \gamma)}{\Gamma(\tau^+ \rightarrow \text{tudo})} < 1.1 \times 10^{-7}.$$

⁹Leon Lederman, Malvin Schwartz e Jack Steinberger ganharam o prêmio Nobel em 1988 pelas experiências dos dois neutrinos.

Isso implica que devemos, de novo, estender o conceito de número leptônico: L_τ ! Segue-se o mesmo esquema de antes $L_\tau(\tau^-, \nu_\tau) = +1$, $L_\tau(\tau^+, \bar{\nu}_\tau) = -1$ e $L_\tau = 0$ para qualquer outra partícula. O neutrino que acompanha o τ^- foi visto diretamente apenas em 2002 no FERMILAB. Com ele ficam completos os férmions do modelo padrão observados experimentalmente: 6 quarks e 6 léptons.

A observação de eventos exóticos puramente leptônicos (como os de cima) ou semi-leptônicos como $K^0 \rightarrow e^+\mu^-$, poderia indicar (como também os processos que violam o número bariônico), a emergência de uma nova física, subjacente aos dados experimentais obtidos até o momento.

No contexto do modelo padrão, a conservação de L e B , e outras simetrias globais, ocorre de forma automática. Isso significa o seguinte: não precisam ser impostas a mão, elas são consequência de princípios mais gerais como: invariância de Lorentz, invariância de gauge, renormalização e o conteúdo de representação do modelo (quais graus de liberdade são incluídos no modelo).

3.6 Estranheza, Charm, Beleza e Top

Há outros números quânticos aditivos como B , L e Q . São a estranheza, S , o charm, c , o beauty, b , e top t ,¹⁰ que são os chamados “sabores dos quarks”. Estes números são apenas conservados pelas interações forte e eletromagnética.

Como nos casos anteriores a conservação do sabor implica que

$$\sum_i F_{\text{inicial}} = \sum_f F_{\text{final}}, \quad (3.42)$$

ou

$$\sum F - \sum \bar{F} = \text{constante}, \quad (3.43)$$

e onde os *Flavours* F , são $F = S, c, b, t$.

Porque foi necessário introduzir esses novos números quânticos? A resposta implica em ir até história da ciência aqui iremos direto a como o tema é considerado atualmente. Para detalhes ver por exemplo [Pi84].

¹⁰Para não confundir c com a operação de conjugação da carga, b com o número bariônico, e t (top) com a inversão temporal, usamos letras minúsculas. Mas, no contexto ficará claro do que estamos falando.

3.6.1 A Estranheza

Tudo começou em 1947 quando foram detectados nos raios cósmicos os chamados *eventos - V*. Estes foram logo identificados como partículas com massas entre a do múon e a do próton (os K^\pm). Em 1951 foram descobertos eventos-V formado com partículas neutras V^0 (agora chamados Λ^0 e K^0). Este tipo de partículas também eram conhecidas com *estranhas* porque apresentavam uma característica incomum: eram produzidas copiosamente mas eram *estranhamente* estáveis. Se são produzidas copiosamente devem ser efeitos das interações fortes mas, porque não decaíam com a mesma rapidez? Em 1952, Abraham Pais ¹¹ propôs que as partículas-V deviam ser produzidas em pares, é a *produção associada* e observou que duas interações são necessárias para reconciliar a produção (fortes) e a vida longa (fracas). Em 1952 foi descoberto nos raios cósmicos a Ξ^- (hiperon) e no ano seguinte o Σ^- foi observada pela primeira vez no laboratório (no cosmotron BNL em Brookhaven). Finalmente em 1955 Kazuhiko Nishijima e Murray Gell-Mann, ¹² independentemente, observaram que a produção associada seria o efeito de um novo número quântico, agora chamado de *estranheza*. Em particular, a simetria de isospin foi estendida para incorporar às novas partículas.

A estranheza é um exemplo de *simetria quebrada*, neste caso, pela interação fraca. A atribuição de S é feita observando processos hadrônicos.

Começamos definindo a estranheza do káon positivo:

$$S(K^+) = +1$$

e da reação



que tem uma seção de choque da ordem de grandeza típica da interação forte, temos que

$$S(K^-) = -1$$

K^+ e K^- são, então, um par partícula-antipartícula.

Para o caso de outras partículas podemos usar reações do tipo



¹¹A. Pais, *Some remarks on V-particles*, Phys. Rev. **86**, 663 (1952).

¹²M. Gellmann, *Isotopic Spin and New Unstable Particles*, Phys. Rev. **92**, 833 (1953).

da qual segue que $S(X) = -S(K)$. Também,

$$p + K^- \rightarrow X + \pi \quad (3.46)$$

implica que $S(X) = S(K^-) = -1$, e

$$p + K^- \rightarrow X' + K^+ \quad (3.47)$$

que $S(X') = -2$. Em particular, a observação de

$$p + \pi^- \rightarrow \Sigma^- + K^+, \quad (3.48)$$

implica $S(\Sigma^-) = -1$ e

$$p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- \quad (3.49)$$

que $S(\Sigma^+) = -1$. Note que Σ^- e Σ^+ têm ambas $B = +1$, $S = -1$, e apenas a carga elétrica é oposta. Isto quer dizer que Σ^- e Σ^+ não formam um par partícula-antipartícula.

As reações

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^0 + K^+, \quad (3.50)$$

e

$$p + K^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0, \quad (3.51)$$

implicam que $S(\Sigma^0) = S(\Lambda^0) = -1$, e

$$p + K^- \rightarrow \Xi^- + K^+, \quad (3.52)$$

que $S(\Xi^-) = -2$. De maneira análoga, $S(\Omega^-) = -3$ e $S(\bar{\Omega}) = +3$.

O esquema da estranheza deu bons resultados prevendo a existência de um novo káon. Por exemplo

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0, \quad (3.53)$$

implica que $S(K^0) = +1$. Então, sabemos até agora que

$$\begin{array}{ll} S(K^+) = +1 & S(K^-) = -1 \\ S(K^0) = +1 & ? \end{array} \quad (3.54)$$

o que implica que temos dois káons com $S = +1$, mas apenas um com $S = -1$. Gell-Mann e Pais sugeriram que devia existir um novo káon neutro, \bar{K}^0 , com $S(\bar{K}^0) = -1$. Pouco depois foi observado na reação

$$p + \pi^+ \rightarrow p + K^+ + \bar{K}^0. \quad (3.55)$$

3.6.2 Cham

Com relação à conservação do charm, temos por exemplo,

$$\frac{D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow K^+\pi^-}{D^0 \rightarrow K\pi} < 4.1 \times 10^{-4}, \quad \Delta c = 2$$

$$\frac{D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow K^+l^-\bar{\nu}_l}{D^0 \rightarrow K^-l^+\nu_l} < 0.005, \quad \Delta c = 2$$

$$|m_{D_1^0} - m_{D_2^0}| < 7 \times 10^{-10} \hbar s^{-1} = 4.6 \times 10^{-10} \text{ MeV}, \quad \Delta c = 2$$

o análogo desta última diferença de massa nos káons¹³ é

$$|m_{K_L^0} - m_{K_S^0}| = (3.483 \pm 0.006) \times 10^{-12} \text{ MeV}.$$

É interessante notar que $m_D \simeq 1869 \text{ MeV}$. Com essa massa tão grande poderíamos esperar que os mésons- D tivessem uma vida média pequena mas,

$$\tau_D \sim 10^{-13} \text{ s}$$

Por exemplo, D não pode ser um isodoubleto com $S = 1$, pois neste caso decairia via interação forte em $K\pi$. Foi, por isso, necessário um novo número quântico que não é carregado pelos píons e pelos káons e que deve ser conservado na interação forte.

Vemos então, como as considerações de simetria ajudam a entender a natureza independentemente de modelos. Quando tivermos um modelo realístico estas características deverão ser por ele incorporadas.

3.7 Regras de Superseleção

Do ponto de vista das teorias até hoje testadas, a conservação da carga elétrica, Q , do número bariônico, B , e do número leptônico total L , é absoluta (ainda que, como já discutimos antes, a física além do MP não precise respeitar essas simetrias). Isto significa que não há “mistura”, i.e., não há elementos da matriz- S que liguem estados com Q , B e L diferentes. Sabemos pela mecânica quântica que uma fase comum a um conjunto de vetores de estado não é mensurável. Se, por exemplo, ψ_1, ψ_2, \dots são estados possíveis de

¹³Assumindo CPT e que estudaremos mais adiante.

um sistema, então, o princípio de superposição diz que a combinação linear $\psi = \sum_n a_n \psi_n$ é também um estado possível. Logo ψ e $\lambda\psi$ pertencem ao mesmo raio.¹⁴ Também ψ_1 e $\lambda\psi_1, \dots$ pertencem ao mesmo raio. Podemos escrever a equivalência

$$\sum_n a_n \psi_n \sim \lambda \sum_n a_n \psi_n,$$

mas,

$$\sum_n a_n \psi_n \not\sim \sum_n a_n (\lambda_n \psi_n).$$

Um *sub-espaço coerente* é definido como um sub-espaço para o qual o princípio de superposição é válido. A existência de diferentes sub-espaços coerentes deve-se a uma *regra de superseleção*,¹⁵ por exemplo, $|Q_i\rangle$ com $i = 1, 2$ são autoestados com carga Q_1 e Q_2 bem definidas (poderia ser B, L, \dots), $Q|Q_i\rangle = q_i|Q_i\rangle$ e

$$|Q_1\rangle + |Q_2\rangle$$

ou qualquer outra combinação linear não corresponde a um estado realizado fisicamente, se $q_1 \neq q_2$. Para estados que pertençam a diferentes sub-espaços coerentes, não apenas a fase comum não é mensurável, como também, a fase de cada estado não é.

Por exemplo, a conservação do momento angular proíbe transições entre sistemas com momento angular J semi-inteiro e a sistemas com J inteiro pois não podemos somar J inteiros para construir um sistema com J semi-inteiro. Então não tem sentido comparar a fase de sistemas com J semi-inteiro com a fase de sistemas com J inteiro. Consideremos, por exemplo, um nêutron. Podemos assumir a fase absoluta do vácuo como sendo zero. A fase do nêutron não tem significado físico pois a transição $n \rightarrow$ vácuo é proibida pela conservação do número bariônico e do momento angular. Também, a fase relativa entre o próton e o nêutron não tem sentido pois eles têm cargas elétricas diferentes.

Consideremos quais as limitações na determinação da carga elétrica que aparecem por causa de regras da superseleção.

¹⁴Um “raio” ψ é definido por um espaço 1-dimensional $\{\lambda\psi\}$, isto é, múltiplo de algum vetor ψ com $\lambda = e^{i\alpha}$ e α real.

¹⁵Este tipo de regras foram introduzidas por G. C. Wick, A. S. Wightman e E. P. Wigner, *The Intrinsic Parity of Elementary Particles*, Phys. Rev. **88**, 101 (1952). Mais referências em D. Giuliani, *Superselection Rules*, arXiv:0710.1516.

Em 1952, E. Wigner considerou duas maneiras de determinar a carga elétrica de uma partícula.¹⁶ Primeiro, podemos considerá-la como um simples número quântico conservado aditivamente em toda reação. Por exemplo, no decaimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ podemos determinar a carga do μ^+ se conhecermos as cargas de e^+ , ν , $\bar{\nu}$, (+1, 0, 0 respectivamente), logo $Q(\mu^+) = +1$. Em 1959, G. Feinberg e M. Goldhaber¹⁷ notaram uma ambigüidade nessa maneira de determinar a carga elétrica, Q . Como B e Q são conservados separadamente, qualquer combinação linear de Q e B ,

$$Q' = \alpha Q + \beta B \quad (3.56)$$

é também conservada. Como α e β podem não ser inteiros, Q' pode não ser inteira também. Poderíamos considerar Q' como uma “nova carga elétrica” se o conceito de carga elétrica é meramente o de um número aditivamente conservado em cada reação. De outra forma, como $p \rightarrow e^+ \pi^0$ está proibida pela conservação do número bariônico, B , então, a carga relativa entre p e e^+ está completamente indeterminada e é um fato de definição.

Na outra maneira, de Wigner, para determinar a carga elétrica de uma partícula deixamos que ela interaja com um campo eletromagnético externo. Observamos, por exemplo, quanto um próton é desviado pelo efeito de um campo elétrico homogêneo. Com esse tipo de experiência determina-se e, como já vimos antes na Eq. (3.13),

$$|Q_{e^-} + Q_{\text{próton}}| = 1.0 \times 10^{-21} e.$$

De fato este é um número maravilhoso:

- se as cargas elétricas dos bárions fossem todas levemente deslocadas dos valores atualmente aceitos por, digamos, uma quantidade $|\Delta e|$ (mantendo os outros parâmetros físicos com seus valores conhecidos), então, a conservação dos bárions seguiria da conservação da carga elétrica em vez de ser um princípio físico independente: $p \rightarrow e^+ \pi^0$ não ocorre pois a carga elétrica é diferente, ainda que por uma quantidade pequena, em ambos os lados da reação.

- se $|\Delta e| \sim 2 \times 10^{-18}$, isto é, apenas três ordens de grandeza abaixo do valor experimental, produziriam-se poderosas forças eletrostáticas em esca-

¹⁶E. P. Wigner, *Symmetry and Reflections*, Indiana University Press, 1967, parte I.

¹⁷G. Feinberg e M. Goldhaber, *Microscopic Test of Symmetry Principles*, PNAS **129**, 1301 (1959); M. Goldhaber e G. Feinberg, *Experimental test of symmetry principles*, Science **129**, 3358 (1959).

las cosmológicas que poderiam explicar a expansão (com aceleração?) do universo observada.¹⁸

3.8 Isospin: Introdução

Em 1932 Heisenberg propôs que o próton e o recentemente descoerto nêutron poderiam ser considerados como dois estados de uma única partícula: o *Núcleon*. Em analogia com o spín não relativístico, existira uma simetria $SU(2)$ quebrada apenas pelas interações eletromagnéticas. Wigner chamou esse novo número quântico de *soin isotópico*, hoje conhecido como *isospin forte*.¹⁹

A simetria de isospin é conservada nas interações fortes e será estudada em detalhe mais adiante. Por exemplo, processos como

$$\pi + N \rightarrow K + N$$

são proibidos: pela conservação da estranheza e pela invariância de isospin. K e π têm $I = 1/2$ e $I = 1$, respectivamente. No entanto, a conservação de S é necessária. Por exemplo

$$\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$$

é permitida pela conservação de isospin mas proibida pela conservação de S . No caso dos isospin temos do lado esquerdo $3 \otimes 2 = 2 \oplus 4$ e do lado direito $2 \otimes 2 = 1 \oplus 1$

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \pi + \Sigma, \\ \Xi^- &\rightarrow K^- + \Lambda, \\ \Omega^- &\rightarrow K^0 + \Xi^-, \end{aligned}$$

são permitidos pela conservação de I e de S . em decaimentos fortes. Também,

$$\Xi \rightarrow N + \pi$$

¹⁸A hipótese acima foi colocada por H. Bondi e R. A. Lyttleton, *On the physical consequences of a general excess of charge*, Proc. Roy. Soc. (London) **A252**, 313 (1959), e refutada experimentalmente por A. M. Hillas e T.E. Cranshaw, *Comparison of the charges of electron, proton and neutron*, Nature **184**, 892 (1959). O valor destes é uma ordem de grandeza menor que o valor que Bondi e Lyttleton precisavam.

¹⁹Heisenber, no entanto, usou a idéia correta no contexto errado: pensava que o nêutron era um estado ligado de um próton com um elétron. Como veremos mais adiante, essa visão tinha problemas com o spinsdos núcleos.

é permitida pela conservação de I mas tem $\Delta S = 2$, logo é proibida pela conservação de S .

Por outro lado, a conservação de S e isospin permite decaimentos como

$$\begin{aligned}\Lambda^0 &\rightarrow \bar{K}^0 + N, \\ \Sigma &\rightarrow \bar{K} + N, \\ \Xi &\rightarrow \bar{K} + \Lambda, \\ \Omega &\rightarrow \bar{K} + \Xi.\end{aligned}$$

De fato, as emissões de \bar{K} , nas reações acima, ocorrem copiosamente para estados excitados de Λ, Σ e Ξ , mas não para os estados fundamentais. Entre os estados bariônicos de menor massa, N, Λ, Σ, Ξ e Ω , os pares de estados que diferem por uma unidade de S têm uma diferença de massa menor que a massa do K ,

$$m_{\Lambda^0} = 1115.60 \text{ MeV},$$

$$m_N \cong 940 \text{ MeV},$$

$$m_{\Lambda^0} - m_N \sim 176 \text{ MeV} < m_K \sim 497 \text{ MeV}.$$

Por isso, os estados bariônicos de menor massa são estáveis com relação a interação forte e decaem somente pela interação fraca.

Há uma diferença entre processos proibidos por leis de conservação que ocorrem como colisões, por exemplo $\pi N \rightarrow KN$ e aqueles que ocorrem como decaimento. As colisões mediadas pelas interações fracas, como $\pi N \rightarrow \Lambda\pi$, usualmente não são observadas devido ao enorme “background” dos processos hadrônicos permitidos. Por outro lado, os decaimentos de partículas que não podem decair via interação forte são facilmente observados simplesmente esperando um tempo suficiente em “bubble chambers”.

É costume introduzir a *hipercarga forte* Y ,

$$Y = B + S \tag{3.57}$$

e

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \tag{3.58}$$

Após a introdução do *Charm* e os outros sabores, a hipercarga é definida como

$$Y = B + S + c + b + t. \tag{3.59}$$

após a introdução do *bottom* e do *top*.

3.9 Simetrias Discretas

3.9.1 Números quânticos aditivos e multiplicativos

As simetrias contínuas como a carga elétrica, o número bariônico, leptônico etc, implicam leis de conservação aditivas. Isso já é evidente nas considerações anteriores. Podemos vê-lo mais claramente da seguinte forma. Sem perda de generalidade podemos considerar uma transformação contínua com gerador F como $U = e^{i\alpha F}$. Sejam dois sistemas descritos pelos vetores de estado $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$. Segundo as leis da mecânica quântica, o sistema composto é descrito pelo vetor $|\psi_1\psi_2\rangle$. Então o efeito de U no sistema composto é dado por

$$\begin{aligned} U|\psi_1\psi_2\rangle &= e^{i\alpha F}|\psi_1\psi_2\rangle = [U|\psi_1\rangle][U|\psi_2\rangle] = e^{i\alpha F}|\psi_1\rangle e^{i\alpha F}|\psi_2\rangle \\ &= e^{i\alpha f_1}|\psi_1\rangle e^{i\alpha f_2}|\psi_2\rangle = e^{i\alpha(f_1+f_2)}|\psi_1\psi_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.60)$$

ou seja $F|\psi_1\psi_2\rangle = (f_1 + f_2)|\psi_1\psi_2\rangle$.

Com as simetrias discretas temos que, se $U_I|\psi_1\rangle = u_1|\psi_1\rangle$ e $U_I|\psi_2\rangle = u_2|\psi_2\rangle$, temos para o mesmo sistema

$$\begin{aligned} U_I|\psi_1\psi_2\rangle &= [U_I|\psi_1\rangle][U_I|\psi_2\rangle] = u_1|\psi_1\rangle u_2|\psi_2\rangle \\ &= u_1 u_2 |\psi_1\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (3.61)$$

Este tipo de transformação está relacionada com operadores do tipo

$$U^2 = 1, \quad (3.62)$$

os quais são unitários e hermitianos, e isso leva, já o vimos, às leis de conservação multiplicativas.

3.9.2 Paridade \mathcal{P}

A operação de paridade ou inversão espacial, \mathcal{P} , troca o sinal de um vetor polar:

$$\vec{x} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{x}, \quad \vec{p} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{p} \quad (3.63)$$

mas, deixa os vetores axiais invariantes, por exemplo, o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, transforma-se como:

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L}. \quad (3.64)$$

A Eq. (3.64) é generalizada para qualquer operador tipo spin. A Eq. (3.64) é uma consequência de $[\mathcal{P}, \vec{L}] = 0$ e, obviamente também deixa invariante as relações de comutação entre os geradores L_i , $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk}L_k$. Ver Fig. 3.1

Podemos ver a relação entre a reflexão especular e a inversão espacial, da maneira seguinte: fazemos primeiro uma reflexão, E , no plano $x - y$

$$\begin{array}{ccc} x & & x \\ y & \xrightarrow{E} & y \\ z & & -z \end{array}$$

e, se agora realizamos uma rotação de 180° ao redor do eixo-z,

$$\begin{array}{ccc} x & & -x \\ y & \xrightarrow{\mathcal{R}} & -y \\ -z & & -z. \end{array}$$

Temos então que

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_z(\pi)E. \quad (3.65)$$

É fácil verificar que as rotações e a inversão espacial comutam:

$$\begin{array}{ccccc} x & & -x & & x \\ y & \xrightarrow{\mathcal{P}} & -y & \xrightarrow{\mathcal{R}} & y \\ z & & -z & & -z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & & -x & & x \\ y & \xrightarrow{\mathcal{R}} & -y & \xrightarrow{\mathcal{P}} & y \\ z & & z & & -z \end{array}$$

Em particular, a inversão espacial comuta com as rotações infinitesimais,

$$[\mathcal{P}, \vec{J}] = 0, \quad (3.66)$$

ou,

$$\mathcal{P}\vec{J}\mathcal{P}^{-1} = \vec{J}. \quad (3.67)$$

Aqui \vec{J} pode ser o spin ou o momento angular orbital. Uma invariância sob paridade é, em última instância, uma invariância sob a troca de esquerda \rightleftharpoons direita, isto é, invariância sob reflexões espaciais.

A paridade do sistema será um número quântico conservado se

$$[H, \mathcal{P}] = 0, \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1} = H. \quad (3.68)$$

Se \mathcal{P} comuta com a Hamiltoniana, H , isto implica que a matriz- S relaciona apenas estados da mesma paridade, ou em outras palavras, que a paridade do estado inicial seja igual à paridade do estado final.

Consideremos o caso de uma função de onda não relativística. O efeito da operação \mathcal{P} é definido como, ²⁰

$$\mathcal{P}\Psi(\vec{x}) = \Psi(-\vec{x}),$$

e aplicando novamente \mathcal{P} , resulta

$$\mathcal{P}^2\Psi(\vec{x}) = \mathcal{P}\Psi(-\vec{x}) = \Psi(\vec{x}).$$

Logo, os autovalores de \mathcal{P} são ± 1 , além de uma fase arbitrária. Podemos então escolher a função de onda como autofunção do operador paridade.

Se

$$H\Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x}), \quad (3.69)$$

e, operando com \mathcal{P} e usando a Eq. (3.69) temos,

$$H\mathcal{P}\Psi(\vec{x}) = E\mathcal{P}\Psi(\vec{x})$$

$$H\Psi'(\vec{x}) = E\Psi'(\vec{x})$$

com

$$\Psi'(\vec{x}) = \mathcal{P}\Psi(\vec{x}).$$

Vemos, então, que as funções de onda $\Psi(\vec{x})$ e $\mathcal{P}\Psi(\vec{x})$ satisfazem a mesma equação de Schrödinger com a mesma energia E . O estado de energia E podem ser diferentes mas degenerados i.e., os dois estados físicos que são descritos pelas funções Ψ e $\Psi' = \mathcal{P}\Psi$ têm a mesma energia. Por outro lado, se o estado não é degenerado, Ψ e $\mathcal{P}\Psi$ devem ser proporcionais entre si,

$$\mathcal{P}\Psi(\vec{x}) = \pi\Psi(\vec{x}). \quad (3.70)$$

O autovalor π chama-se “paridade” do estado Ψ , e como discutido acima, assume os valores

$$\pi = \pm 1, \quad (3.71)$$

e este é o observável associado com o operador Hermitiano \mathcal{P} .

Podemos ver mais explicitamente a introdução do conceito de paridade na mecânica quântica não relativística. O caso relativístico é fácil de ser

²⁰O caso relativista precisa de tratamento especial.

generalizado mas é preciso usar a equação de Dirac. Consideremos a equação de Schrödinger independente do tempo com apenas uma dimensão espacial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x). \quad (3.72)$$

A mesma equação, para o caso de uma reflexão

$$x \rightarrow -x,$$

é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(-x)}{dx^2} + V(-x) \Psi(-x) = E \Psi(-x). \quad (3.73)$$

Se o potencial $V(x)$ é simétrico com relação à origem, i.e., $x = 0$,

$$V(x) = V(-x),$$

a Eq. (3.73) pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(-x)}{dx^2} + V(x) \Psi(-x) = E \Psi(-x). \quad (3.74)$$

Comparando (3.72) e (3.74) vemos que para o mesmo potencial, $V(x)$ temos duas soluções $\Psi(x)$ e $\Psi(-x)$. Como antes, se não existe degenerescência, as duas soluções só podem diferir por uma constante, π , i.e.,

$$\Psi(-x) = \pi \Psi(x). \quad (3.75)$$

Fazendo agora, $x \rightarrow -x$ temos

$$\Psi(x) = \pi \Psi(-x). \quad (3.76)$$

De (3.75) e (3.76) temos,

$$\pi^2 = 1$$

ou,

$$\pi = \pm 1. \quad (3.77)$$

Da exposição acima, concluímos que as soluções da equação de Schrödinger podem ser pares ou ímpares sob a troca de sinal das coordenadas espaciais. Esta propriedade define a paridade do estado.

Um exemplo: em qualquer potencial com simetria esférica, a Hamiltoniana tem também essa simetria:

$$H(\vec{x}) = H(-\vec{x}) = H(r), \quad r = |\vec{r}|,$$

se $[\mathcal{P}, H] = 0$, os estados ligados do sistema têm paridade bem definida. Em particular, no átomo de hidrogênio, sem levar em conta o spin, as soluções são:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \phi) &= \chi(r) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= \chi(r) \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

a inversão espacial, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ é equivalente a

$$\theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \pi + \phi.$$

Graficamente aparece na Fig. 3.2

Isto é,

$$\begin{aligned} e^{(im\phi)} &\rightarrow e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m e^{im\phi} \\ P_l^m(\cos \theta) &\rightarrow P_l^m(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{m+l} P_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

então,

$$Y_l^m(\cos \theta) \rightarrow Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi).$$

Os harmônicos esféricos têm, então, paridade $(-1)^l$. Por exemplo, os estados atômicos s, d, g, \dots têm paridade par, enquanto que p, f, h, \dots têm paridade ímpar.

Transições dipolares elétricas entre estados são caracterizadas pela regra de seleção $\Delta l = \pm 1$, isto é, após a transição, a paridade do estado atômico muda. Por isso, a paridade da radiação eletromagnética $E1$ (fóton) emitida, deve ser -1 . A paridade é conservada no sistema átomo+fóton. Voltaremos a este ponto mais adiante.

3.9.3 Generalização da Paridade

Como a paridade é um número quântico multiplicativo, a paridade de um sistema composto $\Psi = \phi_a \phi_b \dots$ é igual ao produto das paridades de cada parte, i.e., $\pi_\psi = \pi_a \pi_b \dots$. Por exemplo, considerando a reação:

$$A + B \rightarrow 1 + 2, \quad (3.79)$$

podemos escrever simbolicamente

$$|\text{inicial}\rangle = |a\rangle|b\rangle|\text{movimento relativo}\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|\text{inicial}\rangle &= \mathcal{P}|a\rangle\mathcal{P}|b\rangle\mathcal{P}|\text{movimento relativo}\rangle \\ &= \pi_a\pi_b(-1)^l, \end{aligned} \quad (3.80)$$

A conservação da paridade diz que

$$\pi_a\pi_b(-1)^l = \pi_c\pi_d(-1)^{l'}, \quad (3.81)$$

onde fizemos uma análise semelhante no estado final.

Nas interações eletromagnética e forte, a paridade é conservada. Assim, é possível atribuir a cada partícula elementar uma paridade intrínseca.

No caso dos fótons temos que a interação eletromagnética é proporcional a $J_\mu A^\mu$, com $J_\mu = (\rho, \vec{j})$. Sob a transformação de paridade temos (omitimos por simplicidade a variável temporal)

$$(\rho(\vec{x}), \vec{j}(\vec{x})) \xrightarrow{\mathcal{P}} (\rho(-\vec{x}), -\vec{j}(-\vec{x})).$$

Se a interação eletromagnética é invariante devemos ter que

$$\vec{A}(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{A}(-\vec{x}), \quad A_0(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{P}} A_0(-\vec{x}), \quad (3.82)$$

e, logo, o campo eletromagnético deve transformar-se como

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}A_0 + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\vec{E}(-\vec{x})$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} +\vec{B}(-\vec{x}).$$

Considerando um campo \vec{A} , como $\vec{A}(\vec{x}) \propto \vec{\varepsilon}f(x)$, onde $f(x)$ é uma função escalar, vemos que sob \mathcal{P} , $\vec{\varepsilon} \rightarrow -\vec{\varepsilon}$. Este comportamento do vetor de polarização caracteriza a *paridade intrínseca* do campo eletromagnético.

Para outras partículas também é possível definir uma paridade intrínseca. Entretanto, essa atribuição deve ser confirmada experimentalmente. Por exemplo, na reação

$$p + p \rightarrow \pi^+ + p + n,$$

na qual um pión é criado, é necessário atribuir uma paridade intrínseca ao pión, para ter a mesma paridade no estado inicial e final. Vamos considerar, em detalhe, a determinação da paridade intrínseca dos píons π^\pm e π^0 . Antes, devemos estudar a determinação do spin dos mesmos que será útil quando considerarmos o spin.

A paridade intrínseca está definida para partículas em repouso. Além de partículas em repouso, partículas com momento angular orbital bem definido são autoestados da paridade.

Na equação de Dirac, a paridade do férmion (f) e anti-férmion (\bar{f}) estão relacionadas

$$\pi_f \pi_{\bar{f}} = -1. \quad (3.83)$$

A predição (3.83) tem sido verificada experimentalmente na reação $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Se o estado inicial tem momento angular orbital nulo (parapositronium), temos $\pi_{e^+}\pi_{e^-} = (-1)^{L_\gamma}$, onde L_γ é o momento angular orbital do estado final. Medidas da polarização dos fótons confirmam a (3.83).²¹ No entanto, não é possível determinar π_{e^+} ou π_{e^-} separadamente. É convenção usar $\pi_{e^-} = \pi_{\mu^-} = \pi_{\tau^-} = +1$, $\pi_{e^+} = \pi_{\mu^+} = \pi_{\tau^+} = -1$; $\pi_u = \pi_d = \pi_s = \pi_c = \pi_b = \pi_t = +1$; $\pi_{\bar{u}} = \pi_{\bar{d}} = \pi_{\bar{s}} = \pi_{\bar{c}} = \pi_{\bar{b}} = \pi_{\bar{t}} = -1$. O fato é que não podemos criar elétrons ou pósitrons isolados via interações eletromagnéticas. O mesmo vale para quarks via interações eletromagnéticas e fortes. Em termos dos hadrons a convenção é $\pi_p = \pi_n = 1$, $\pi_{K^-} = \pi_{D^-} = \pi_{B^-} = -1$. Os bósons de gauge do modelo padrão γ , W^\pm , Z^0 e os gluons têm todos paridade intrínseca negativa.

3.10 Determinação do spin dos píons

Não existe nenhum princípio fundamental para predizer o fato de que o pión tem spin zero. Isso deve ser determinado experimentalmente.

Para os píons carregados positivamente, a experiência consiste em estudar as duas reações:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow \pi^+ + d & (a) \\ \pi^+ + d &\rightarrow p + p & (b). \end{aligned} \quad (3.84)$$

A idéia fundamental é que a seção de choque para qualquer reação desse tipo implica na soma sobre todos os estados possíveis das partículas finais e

²¹C. S. Wu e I. Shaknov, *The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation*, Phys. Rev. **77**, 136 (1970).

este número depende do spin (quer dizer que usaremos detetores que registrem as partículas finais independente de sua polarização).

Podemos adiantar que o spin do pión deve ser inteiro, pois o spin do dêuteron é 1, e o do próton é 1/2. A mera observação das reações na Eq. (3.84) elimina a possibilidade de que o spin do pión seja semi-inteiro.

Vamos também considerar que os estados iniciais nas reações da Eq. (3.84) não estão polarizados e, por isso, tomaremos a média sobre os estados de spin iniciais. Podemos mostrar que para a reação geral na Eq. (3.79)

$$\left(\frac{d\sigma_{ab\rightarrow cd}}{d\Omega^*}\right)_{n.p.} = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}} \times \sum_{s_i, s_f} |\langle cd|H|ab\rangle|^2, \quad (3.85)$$

e, similarmente,

$$\left(\frac{d\sigma_{cd\rightarrow ab}}{d\Omega^*}\right)_{n.p.} = \frac{1}{(2s_c+1)(2s_d+1)} \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}} \times \sum_{s_i, s_f} |\langle ab|H|cd\rangle|^2, \quad (3.86)$$

onde s_i é o spin da partícula i e, $\lambda(x, y, z)$ é a função triangular definida no Capítulo 1. O *princípio do balanço detalhado* estabelece que o número de transições por unidade de tempo de reações como as das (3.85), para a mesma energia do centro de massa, é igual.

Em termos das expressões nas Eqs. (3.85) e (3.86) resulta

$$\sum_{s_i, s_f} |\langle cd|H|ab\rangle|^2 = \sum_{s_i, s_f} |\langle ab|H|cd\rangle|^2, \quad (3.87)$$

onde as somas são sobre todos os spins das partículas incidentes e finais. Esta relação é uma consequência de assumir a invariância da teoria sob inversão temporal e espacial (o que é válido para as interações fortes). A inversão temporal (que estudaremos mais adiante) troca o estado inicial com o estado final e inverte todos os momentos e spins. A inversão espacial troca o sinal dos momentos mas não muda o dos spins. Logo

$$\begin{aligned} & |\langle f(\vec{p}_c, \vec{p}_d, s_c, s_d)|H|i(\vec{p}_a, \vec{p}_b, s_a, s_b)\rangle| \\ & \quad \downarrow \mathcal{T}, \mathcal{P} \\ & |\langle i(p_a, p_b, -s_a, -s_b)|H|f(p_c, p_d, -s_c, -s_d)\rangle| \end{aligned} \quad (3.88)$$

Somando pelas $2s + 1$ projeções de spin possíveis (de $-s$ a s) obtemos a Eq. (3.87).²²

Então, usando a Eq. (3.87) obtemos das Eqs. (3.85) e (3.86),

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}}{d\Omega^*} \right)_{n.p.} (2s_a + 1)(2s_b + 1)\lambda(s, m_a^2, m_b^2) = \\ \left(\frac{d\sigma_{cd \rightarrow ab}}{d\Omega^*} \right)_{n.p.} (2s_c + 1)(2s_d + 1)\lambda(s, m_c^2, m_d^2). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Vemos então que, medindo as duas seções de choque, a energias e ângulos apropriados, podemos determinar o spin de uma das partículas se conhecemos o das outras partículas.

Usando a Eq. (3.89) para o caso das reações (3.84) encontramos,

$$\left(\frac{d\sigma_{pp \rightarrow \pi d}}{d\Omega^*} \right)_{np} = \frac{3}{4}(2s_\pi + 1) \frac{\lambda(s, m_\pi^2, m_d^2)}{\lambda(s, m_p^2, m_p^2)} \left(\frac{d\sigma_{\pi d \rightarrow pp}}{d\Omega_{c.m.}} \right)_{np}. \quad (3.90)$$

Medidas da reação $\pi^+ d \rightarrow pp$ foram obtidas para píons com energia cinética de 37.6 MeV, e em 1958 deram os seguintes resultados:²³

$$\left(\frac{d\sigma_{\pi d \rightarrow pp}}{d\Omega^*} \right)_{np} = [0.34 \pm 0.05 + (1.55 \pm 0.14) \cos^2 \theta] \times 10^{-27} \frac{\text{cm}^2}{\text{ster}}. \quad (3.91)$$

Das duas últimas equações temos,

$$\left(\frac{d\sigma_{pp \rightarrow \pi d}}{d\Omega^*} \right)_{np} = (2s_\pi + 1)[0.015 \pm 0.02 + (0.069 \pm 0.006) \cos^2 \theta] \times 10^{-27} \frac{\text{cm}^2}{\text{ster}}, \quad (3.92)$$

e, pelas medidas diretas²⁴

$$\left(\frac{d\sigma_{pp \rightarrow \pi d}}{d\Omega^*} \right)_{np} = [0.014 \pm 0.02 + (0.071 \pm 0.06) \cos^2 \theta] \times 10^{-27} \frac{\text{cm}^2}{\text{ster}}. \quad (3.93)$$

²²Em teorias nas quais a invariância de \mathcal{T} e/ou \mathcal{P} não são válidas, o princípio do balanço detalhado ainda será válido se for possível aplicar a teoria das perturbações ($H' \ll H_0$) e H' for um operador Hermitiano, i.e., $\langle f|H'|i\rangle = \langle i|H'|f\rangle^*$.

²³R. Durbin, H. Loar e J. Steinberger, *The Spin of the Pion via the Reaction $p + d \leftrightarrow p + p$* , Phys. Rev. **83**, 646 (1951); D. L. Clark, A. Roberts e R. Wilson, *Cross Section for the Reaction $p + d \rightarrow p + p$, and the Spin of the π^+ Meson*, *ibid.* **83**, 649 (1951).

²⁴W. F. Cartwright, C. Richman, M. N. Whitehead e H. A. Wilcox, *The Production of Positive Pions by 341-Mev Protons on Protons*, Phys. Rev. **91**, 677 (1953); F. S. Crawford e M. L. Stevenson, *Reaction $p + p \rightarrow \pi^+ + d$* , Phys. Rev. **97**, 1305 (1955). Dados mais recentes da reação $pp \rightarrow \pi N$ podem ser encontrados em R. A. Arndt, I. I. Strakovsky, R. L. Workman, e D. V. Bugg, *Analysis of the reaction $p + d \rightarrow pp$ to 500 MeV*, Phys. Rev. C **48**, 1926 (1993); *Erratum*, *ibid.* **49**, 1229 (1994).

Só temos consistência da Eq. (3.92) e (3.93) se $s_\pi = 0$. Em 1951-53, medidas das seções de choque totais desses mesmos processos também eram consistentes com $s_\pi = 0$. O fato que o decaimento é quase isotrópico no SCM confirma que $s_\pi = 0$.

Para o caso do pión neutro, o processo estudado é o decaimento eletromagnético $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Consideremos esse decaimento no sistema em repouso do pión. Nesse referencial os dois fótons devem se mover em direções opostas, cada um com um momento igual à metade da massa em repouso do pión. Da própria existência do decaimento vemos também que s_{π^0} deve ser inteiro pois $s_\gamma = 1$.

Escolheremos a direção de propagação de um fóton ao longo do eixo-z. Uma onda plana

$$\vec{A}(\vec{r}) = A \vec{\epsilon} e^{ikz}$$

representa um fóton com momento bem definido. O vetor de polarização $\vec{\epsilon}$ é sempre ortogonal à direção do movimento ($\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$). Podemos escolher as bases

$$\hat{\epsilon}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}^x \pm i\hat{\epsilon}^y), \quad (3.94)$$

onde $\hat{\epsilon}^x$, $\hat{\epsilon}^y$ são vetores unitários na direção x e y respectivamente. $\hat{\epsilon}^+$ representa um fóton com momento angular ao longo da direção $+z$ igual a $+1$, ('right' ou R); e $\hat{\epsilon}^-$ um fóton um cujo projeção ao longo do mesmo eixo é -1 ('left' ou L). Como o fóton tem massa nula, estas são as únicas possibilidades, i.e., não existe fóton com componente nula do momento angular ao longo da direção do movimento.

Representemos o decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ como nas Figs. 3.3 e 3.4, onde usamos a seguinte notação: $+(-)$ quer dizer um fóton se movendo ao longo do eixo $+z(-z)$. Temos quatro estados quânticos possíveis:

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle &= |+, R; -, R\rangle & (a) \\ |\phi_b\rangle &= |+, R; -, L\rangle & (b) \\ |\phi_c\rangle &= |+, L; -, R\rangle & (c) \\ |\phi_d\rangle &= |+, L; -, L\rangle & (d). \end{aligned} \quad (3.95)$$

O mesmo decaimento, mas, num sistema de coordenadas girado 180° ao redor do eixo-x, é mostrado na Fig. 3.5. Nesse caso agora o fóton 1 move-se ao longo de $-z$ e será rotulado por $-$, e o 2 obviamente agora por $+$. A polarização não muda, isto é, se o fóton 1 estava polarizado à direita no

sistema original, continuará polarizado à direita após o giro:

$$\begin{aligned}
|\phi'_a\rangle &= |-, R; +, R\rangle = |\phi_a\rangle & (a) \\
|\phi'_b\rangle &= |-, R; +, L\rangle = |\phi_c\rangle & (b) \\
|\phi'_c\rangle &= |-, L; +, R\rangle = |\phi_b\rangle & (c) \\
|\phi'_d\rangle &= |-, L; +, L\rangle = |\phi_d\rangle & (d).
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Vemos que os estados $|\phi_a\rangle$ e $|\phi_d\rangle$, que têm componente nula do momento angular ao longo do eixo-z, são invariantes sob essa rotação do sistema de coordenadas. Contudo, se o π^0 tivesse spin 1, sua função de onda se comportaria sob rotações como $Y_1^m(\theta, \phi)$, com $m = 0$, e esta função muda de sinal sob uma rotação (ver pag.99). Então a conclusão é: uma partícula neutra de spin-1, não pode decair em 2 fótons (“teorema de Landau-Yang”).²⁵ Segundo esse argumento, o spin do π^0 deve ser 0 ou ≥ 2 . No entanto, em colisões núcleon-núcleon a altas energias observa-se que os π^\pm e os π^0 são produzidos em igual número indicando que o pión π^0 têm também spin zero, $s_{\pi^0} = 0$.

Por outro lado, a vida média do π^0 é muito pequena, $\tau_{\pi^0} = 8.4 \pm 0.6 \times 10^{-16}$ s, mesmo quando comparada com a dos píons carregados, $\tau_{\pi^\pm} = 2.6033 \pm 0.0005 \times 10^{-8}$ s. Isto é devido ao fato que $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, é um decaimento eletromagnético, enquanto que os decaimentos dos píons carregados como, por exemplo, $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ é um decaimento fraco, ou seja, produzido pelas interações fracas. A pequena vida média do π^0 o torna difícil de ser usado como projétil numa experiência de absorção.

3.11 Paridade Intrínseca

Como veremos mais adiante, os mésons estão formados por pares $q_a\bar{q}_b$ (quark-anti-quark) e os bárions por três quarks $q_a q_b q_c$. A paridade intrínseca do méson é $\pi_M = \pi_a \pi_{\bar{b}} (-1)^l = (-1)^{l+1}$, l é o valor do momento angular orbital do par $q_a\bar{q}_b$. Para os mésons mais leves $l = 0$,²⁶ e devem ter paridade negativa: π, K, D . No caso dos bárions temos $\pi_B = \pi_a \pi_b \pi_c (-1)^{l_1} (-1)^{l_2} =$

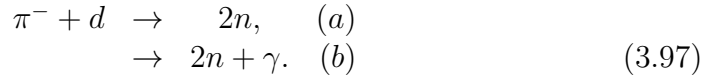
²⁵L. D. Landau, *On the angular momentum of a system of two photon*, Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. **60**, 207 (1948). C. N. Yang, *Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons*, Phys. Rev. **77**, 242 (1950); *Possible Experimental Determination of Whether the Neutral Meson is Scalar or Pseudoscalar*, *ibid*, 722 (1950).

²⁶Este é um resultado experimental muito importante.

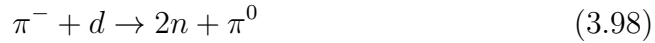
$(-1)^{l_{12}+l_3}$, onde l_{12} e l_3 são os momentos angulares orbitais de dois dos quarks e do terceiro com relação aos dois primeiros. Para antibarions $\pi_{\bar{B}} = -\pi_B$.

De posse da informação relativa ao spin dos píons, podemos considerar o caso da determinação da sua paridade intrínseca. Já dissemos que é possível, ou melhor, necessário atribuir um número quântico (a paridade intrínseca) às partículas elementares. Como em todos os casos que envolvem um sinal, o ponto de partida deve ser definido.

No caso dos píons carregados, a paridade intrínseca, π_π foi determinada pela observação da absorção de píons negativos lentos em deutério,



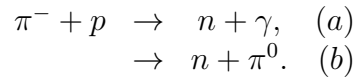
A razão destas duas reações é 2.35 ± 0.35 . Por outro lado, uma terceira reação,



é muito suprimida ²⁷

$$\frac{\Gamma(\pi^- + d \rightarrow 2n + \pi^0)}{\Gamma(\pi^- + d \rightarrow 2n + \gamma)} = -0.0034 \pm 0.0043 \quad (3.99)$$

ainda que esperado que esta seja comparável às duas primeiras. Por outro lado, sabe-se que as seguintes reações existem (captura em hidrogênio):



A existência da reação [3.97(a)] mostra que o pión tem paridade ímpar. Isto porque é sabido, por experiências com raios-X mesônicos, ²⁸ e pelo cálculo direto, ²⁹ que a captura do π^- pelo deutério ocorre no estado atômico- s , sendo a captura- p muito pequena. Como o deutério tem spin-1 (no deutério $l = 0$

²⁷W. Chinowsky e J. Steinberger, *Reaction $\pi^- + d \rightarrow 2n + \pi^0$; Parity of the Neutral Meson*, Phys. Rev. **100**, 1476 (1955).

²⁸T. H. Fields, G. B. Yodh, M. Derrick, e J. G. Fetkovich, Phys. Rev. Lett. *Cascade Time of π^- in Liquid Hydrogen*, **5**, 69 (1960).

²⁹M. Leon e H. Bethe, *Negative Meson Absorption in Liquid Hydrogen*, Phys. Rev. **127**, 636 (1962).

entre o próton e o nêutron), isto é $s_d = 1$, e o pión tem spin zero, $s_{\pi^0} = 0$, o momento angular total do lado esquerdo é $j = 1$, ou seja, igual ao spin do deutério. A paridade do deuteron é par, assumindo que o próton e o nêutron tenham a mesma paridade (comentaremos isto em breve). Assim, a paridade do lado esquerdo de (3.97) está dada apenas pela paridade intrínseca do pión.

Como o momento angular total do lado esquerdo da (3.97) é $j = 1$, o do lado direito deve também ter $j = 1$. Por outro lado, o estado final das reações (3.97) tem 2 nêutrons para os quais existem duas possibilidades.

A função de onda de duas partículas de spin-1/2 pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
 S = 1 \text{ tripleto } \left\{ \begin{array}{l} \Psi(1, 1) = \phi_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (a) \\ \Psi(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + \phi_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\phi_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \quad (b) \\ \Psi(1, -1) = \phi_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \quad (c) \end{array} \right. \\
 S = 0 \text{ singlete } \Psi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\phi_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \phi_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\phi_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})] \quad (d)
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

As três primeiras expressões [3.100(a-c)] são um tripleto de spin= 1, enquanto que a [(3.100(d)] é um singlete de spin= 0. Pode-se verificar pela Eq. (3.100), que sob a troca de partículas, o tripleto é simétrico e o singlete antissimétrico. Por outro lado, como estamos tratando de dois férmions idênticos, a função de onda total deve ser completamente antissimétrica (Princípio de Pauli generalizado). Sabemos que pela troca de coordenadas temos um fator $(-1)^l$ e pela troca de spins $(-1)^{s+1}$ (tripleto $s = 1$, simétrico; singlete $s = 0$, antissimétrico), logo:

$$(-1)^l (-1)^{s+1} = (-1)^{l+s+1}$$

onde $l + s$ deve ser par para obter a função de onda antissimétrica.

Como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, onde \vec{L} é o momento angular orbital e \vec{S} , o spin total, podemos ter

$$|l - s|, \dots, |l + s|.$$

Os valores para J são: se $s = 0$ (singlete), temos $l = 1$, para manter a conservação do momento angular total ($j = 1$ no estado inicial). Mas, neste caso, a função de onda dos dois férmions é simétrica ($l + s$ é ímpar). Para o caso em que $s = 1$ podemos ter $l = 1, 3, \dots$ e temos as possibilidades

$$l = 1, \quad j = 0, 1, 2;$$

$$l = 3, \quad j = 2, 3, 4.$$

Mas, apenas com $l = 1$ obtemos $j = 1$ se $s = 1$, assim os dois nêutrons estão no estado 3_1^P . Nesse caso a paridade do estado final é $(-1)^l = -1$, logo

$$\pi_{\pi^-} = -1. \quad (3.101)$$

Resumindo, no decaimento $\pi d \rightarrow 2n$, a função de onda do estado final é o produto de uma parte espacial e uma de spín, e deve ser antisimétrica sob a troca de dois nêutrons. Para os estados de espín temos as possibilidades $s = 0$ ou $s = 1$. O estado tripleto ($s = 1$) tem função de onda de spín simétricas, ver Eq. (3.100). Quer dizer que a parte espacial é que deve ser antissimétrica, com $l = 1, 3, \dots$. No caso do estado singleto ($s = 0$), a função de onda de spín é simétrica, logo a parte espacial deve ser simétrica com l par, e o momento angular total j pode tomar os valores $j = 0, 2, \dots$. Conclusão, o estado dos neutrons pode ser ${}^3S_0, {}^3D_1, \dots$ ou ${}^3P_1, \dots$ (lembrar da notação ${}^{2J+1}L_S$, onde J, L, S denotam os valores do momento angular total, orbital e de spin respectivamente, acima denotados por j, l, s), mas apenas no estado 3P_1 a reação (3.97(a)) pode ocorrer.

A não ocorrência da reação (3.98) já é um sinal de que a paridade do π^- deve ser igual à do π^0 . O decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ oferece, em princípio, a possibilidade de determinar a paridade do π^0 . Já sabemos que o spin do π^0 também é zero. Como o decaimento se dá em repouso, a função de onda do estado final deve transformar-se como um sistema com $j = 0$. O que se deve estudar é a reação

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + e^- + e^+. \quad (3.102)$$

Esquemáticamente, temos os processos que aparecem na Fig. 3.6.

A amplitude do decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ deve ser, como mencionamos acima, linear em $\vec{\varepsilon}_1$, e $\vec{\varepsilon}_2$. Para o caso $j = 0$ temos duas possibilidades:

$$\begin{array}{ll} \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 & \text{paridade par} \\ (\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \hat{k} & \text{paridade ímpar.} \end{array}$$

Como antes, \hat{k} é um vetor unitário ao longo de \vec{k} , o momento relativo do sistema dos dois fótons.

Se a paridade é conservada, apenas uma das formas é possível, e podemos determinar se o π^0 é um escalar (paridade par) ou um pseudoescalar (paridade ímpar), medindo as orientações relativas de $\vec{\varepsilon}_1$ e $\vec{\varepsilon}_2$. Por exemplo, se π^0 é pseudoescalar, $\vec{\varepsilon}_2$ não pode ter uma componente na direção de $\vec{\varepsilon}_1$. Como a seção de choque da produção de pares depende do vetor de polarização

do fóton, o que se estuda experimentalmente é a orientação relativa dos dois planos dos pares e^+e^- . Em 1955, N. M. Kroll e W. W. Wada mostraram que esse efeito de correlação persiste para a conversão interna no processo $\pi^0 \rightarrow e^-e^+e^-e^+$, isto é, o par e^-e^+ lembra a polarização do fóton virtual. Cálculos mostraram que a distribuição esperada é $1 + k \cos 2\phi$, sendo ϕ o ângulo entre os dois planos dos pares e^-e^+ . Teoricamente $k_{teor.} = +0.47$ para um π^0 escalar, e $k_{teor.} = -0.47$ para um π^0 pseudoescalar. Experimentalmente, $k_{exp} \sim -0.7$, excluindo um π^0 escalar por três desvios padrões. Veja Fig. 3.6.³⁰

Em termos da linguagem de polarização circular $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2$ é equivalente à combinação linear,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_a\rangle + |\phi_d\rangle)$$

ou $RR + LL$, que é obviamente par sob \mathcal{P} , das Eqs.(3.96), e $(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \vec{k}$ é ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_a\rangle - |\phi_d\rangle),$$

ou seja, correspondem à combinação $RR - LL$, que é ímpar sob \mathcal{P} . Podemos concluir que *os píons são pseudoescalares* $J^P = 0^-$.

Dissemos antes que, ao atribuir as paridades intrínsecas às partículas elementares, devemos *definir* o ponto de partida. Este é :

$$\pi_{\text{próton}} \equiv \pi_p = +1.$$

Agora, quanto vale $\pi_{\text{nêutron}} \equiv \pi_n$? Na determinação da paridade do π^- , aparece $\pi_n \pi_n$, ou seja, experimentalmente $\pi_n = \pm 1$. A escolha é teórica, a física é uma ciência experimental, mas não só isso. O próton e o nêutron formam um isodoubleto (verificado experimentalmente) e estes devem ter as mesmas propriedades hadrônicas, $[H_{forte}, \vec{I}] = 0$, por isso,

$$\pi_n = +1.$$

Atribuir uma paridade absoluta ao pión, por exemplo na [3.97(a)], é possível porque os bósons podem ser criados ou destruídos isoladamente. Por outro lado, como o número bariônico é conservado absolutamente, na reação, a

³⁰R. Plano, A. Prodell, N. Samios, M. Schwartz, e J. Steinberger, *Parity of the Neutral Pion*, Phys. Rev. Lett. **3**, 525(1959).

paridade relativa entre o estado inicial e final é independente do sinal escolhido para a paridade do núcleon.

Por que a paridade relativa do próton e do nêutron, ou do π^+ e π^0 não pode ser medida? Isto está relacionado com as regras de superseleção devido às leis de conservação aditivas. Consideremos as equações

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|p\rangle &= |p\rangle \\ \mathcal{P}|n\rangle &= |n\rangle.\end{aligned}\tag{3.103}$$

Um operador de paridade modificado,

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} e^{i\pi Q},\tag{3.104}$$

onde Q é o operador da carga elétrica, pode ser introduzido. Fisicamente \mathcal{P} e \mathcal{P}' são indistinguíveis. Os dois fazem $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, e comutam com H . Mas,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'|p\rangle &= \mathcal{P} e^{i\pi Q}|p\rangle = -\mathcal{P}|p\rangle = -|p\rangle \\ \mathcal{P}'|n\rangle &= |n\rangle,\end{aligned}\tag{3.105}$$

pois $Q|p\rangle = |p\rangle$. Vemos que o operador da paridade \mathcal{P}' modifica a paridade intrínseca do próton mas não a do nêutron. Como não há razões para preferir \mathcal{P} a \mathcal{P}' , concluímos que a paridade relativa entre sistemas de cargas diferentes não é mensurável, i.e., que existe uma regra de superseleção. Outros exemplos,

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} e^{i\pi B}, \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}' = \mathcal{P} e^{i\pi Y}$$

com B e Y os operadores do número bariônico e hipercarga, respectivamente. Segue-se o mesmo argumento e podemos concluir que a paridade relativa é um observável somente em sistemas que têm números quânticos aditivos iguais como Q, B, Y . Por exemplo, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ tem todas as cargas nulas em ambos os lados da reação.

No caso de partículas com estranheza, sabemos que elas são produzidas em associação, p. ex:

$$p + p \rightarrow K^+ + \Lambda + p,\tag{3.106}$$

logo, apenas a paridade do par $K\Lambda$ relativa à do núcleon pode ser medida. Encontra-se que é ímpar e como por convenção a paridade do hiperon Λ é $+1$, então a do K^+ é -1 . Assumindo:

$$\pi_p = \pi_n = \pi_\Lambda = +1,\tag{3.107}$$

a paridade de todos os hádrons com isospine estranheza pode ser determinada.

A paridade é conservada nas interações forte e eletromagnética, mas é violada na interação fraca. Para estudar a conservação ou a quebra da paridade nas diferentes interações, devemos introduzir uma maneira de medir o grau de conservação da paridade. Se $|a\rangle$ é um estado não degenerado de um sistema com paridade par $\mathcal{P}|a\rangle = +|a\rangle$, e $|b\rangle$ ímpar, $\mathcal{P}|b\rangle = -|b\rangle$. Se a paridade não é conservada, então $|c\rangle$ deve ser uma superposição de uma parte par e outra ímpar,

$$|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (3.108)$$

e, neste caso $|c\rangle$ não é mais um auto-estado do operador paridade,

$$P|c\rangle = \alpha|a\rangle - \beta|b\rangle \neq |c\rangle$$

e, $\mathcal{F} = \alpha/\beta$ é uma medida da não conservação da paridade, $\beta \leq \alpha$. A paridade é violada maximalmente se $|\mathcal{F}| = 1$.

Aqui devemos dizer apenas que na interação forte, experimentalmente temos $|\mathcal{F}|^2 < 10^{-8}$, e na interação eletromagnética $|\mathcal{F}|^2 < 10^{-12}$. Estes limites são consistentes como sendo devidos aos efeitos da interação fraca. Mas, no caso da QCD temos o termo θ que viola P e T , explicar porque este parâmetro tem que ser muito pequenos $\theta < 10^{-9}$ é o chamado problema da violação de CP forte.

3.12 Conjugação da Carga, \mathcal{C}

Esta operação de simetria “inverte” a carga e outros números quânticos aditivos. Em teoria quântica, essa operação transforma uma partícula na sua antipartícula. Não altera o spin. Por exemplo, os caso do próton anti-próton ou elétron-pósitron aparecem nas Tabelas 3.3 e 3.4, respectivamente. Apenas para as interações fortes e eletromagnéticas $[\mathcal{C}, H] = 0$.

Como veremos mais tarde, a interação fraca viola a invariância sob \mathcal{P} , e também sob \mathcal{C} . Se os neutrinos são não-massivos, seus únicos estados de spin são $J_z = \pm\frac{1}{2}$, com z a direção do momento \vec{p} . Experimentalmente, verifica-se que apenas neutrinos com $J_z = -\frac{1}{2}$ e antineutrinos com $J_z = +\frac{1}{2}$ existem na natureza. Gráficamente mostra-se na Fig. 3.9, como os neutrinos se transformam sob \mathcal{P}, \mathcal{C} e sob a *inversão combinada*, \mathcal{PC} .

	Próton	Antipróton
Q	$+e$	$-e$
B	$+1$	-1
μ	$+2.79(e\hbar/2Mc)$	$-2.79(e\hbar/2m_p c)$
σ	$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$

Tabela 3.1: Números quânticos aditivos para próton e anti-próton.

	Elétron	pósitron
Q	$-e$	$+e$
L_e	$+1$	-1
μ	$-(e\hbar/2m_e c)$	$+(e\hbar/2m_e c)$
σ	$\frac{1}{2}\hbar$	$\frac{1}{2}\hbar$

Tabela 3.2: Números quânticos aditivos para elétron-pósitron.

O operador \mathcal{C} é tal que

$$\mathcal{C}^2 = 1$$

e, como o da paridade, é um operador discreto. Há, no entanto, uma grande diferença entre o operador \mathcal{P} e o \mathcal{C} . Este último nem sempre tem autoestados. Suponhamos que

$$\mathcal{C}|N\rangle = \eta_{\mathcal{C}}|N\rangle, \quad (3.109)$$

com N um conjunto de números quânticos aditivos. Assumamos também que $|N\rangle$ é um autovetor do operador de carga elétrica,

$$Q|q\rangle = q|q\rangle$$

e que

$$\mathcal{C}|N\rangle = |-N\rangle$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}Q|q\rangle &= q\mathcal{C}|q\rangle = q|-q\rangle \\ \mathcal{C}Q|q\rangle &= Q|-q\rangle = -q|-q\rangle. \end{aligned}$$

Então

$$(\mathcal{C}Q - Q\mathcal{C})|q\rangle = 2q|-q\rangle = 2\mathcal{C}Q|q\rangle,$$

isto é,

$$[\mathcal{C}, Q] = 2\mathcal{C}Q. \quad (3.110)$$

Como os dois operadores não comutam, não podemos diagonalizá-los simultaneamente. Em outras palavras, uma partícula carregada não pode satisfazer a Eq.(3.109).

O argumento acima, feito para a carga elétrica, também vale para B, L, Y, \dots e outros números quânticos aditivos. Então, apenas partículas verdadeiramente neutras ($Q = B = L = Y \dots = 0$) podem ser autoestados da operação de conjugação da carga, \mathcal{C} . Para estes vale que $\eta = \pm 1$ na Eq.(3.109). Esse número quântico chama-se paridade- \mathcal{C} e satisfaz uma lei de conservação multiplicativa.

Consideremos, por exemplo, o pión neutro, π^0 ,

$$\mathcal{C}|\pi^0\rangle = \pm|\pi^0\rangle.$$

Para escolher o sinal na Eq.(3.109) devemos lembrar que para o fóton $\mathcal{C}_\gamma = -1$, pois para ter conservação de \mathcal{C} na QED, se $e \rightarrow -e$, então $A_\mu \rightarrow -A_\mu$. Como o decaimento dominante do pión é, como vimos antes,

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

temos que $\mathcal{C}(\pi^0) = +1$. O decaimento

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$$

é proibido pela invariância de \mathcal{C} . Experimentalmente temos

$$R \equiv \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \text{tudo})} < 3.1 \times 10^{-8}.$$

Se $\mathcal{C}_\gamma = +1$ ou se a \mathcal{C} -paridade não fosse conservada esperaríamos $R \approx O(\alpha)$.

Testar a conservação de \mathcal{C} na interação eletromagnética passou a ser prioritário depois que, em 1964, foi descoberta a violação de \mathcal{CP} . Uma possibilidade era que a violação de \mathcal{CP} fosse devido à violação de \mathcal{C} na interação eletromagnética, já que esta conserva a paridade com maior certeza. Além do decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ comentado acima, procuraram-se efeitos no decaimento do méson- η , ($m_\eta = 550 \text{ MeV}$) que, como o π^0 , decai através da interação eletromagnética:

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow \gamma\gamma \\ &\rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \\ &\rightarrow \pi^+\pi^-\gamma \\ &\rightarrow \pi^0e^+e^- \end{aligned}$$

A primeira das reações acima tem um BR de 38 % e implica que a paridade- C do η é $+1$. Disto segue que o decaimento $\eta \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ deve ser proibido, se interpretado como $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma$, com posterior conversão interna $\gamma \rightarrow e^+ e^-$, uma vez que $\mathcal{C}_\gamma = -1$ e $\mathcal{C}(\pi^0) = +1$. Esse decaimento não deve ocorrer. O respectivo BR é $< 5 \times 10^{-4}$. Mas, a não existência do referido decaimento é uma prova ambígua da ausência de violação de \mathcal{C} na interação eletromagnética, pois depende da interpretação (do modelo). Um teste melhor seria feito comparando os espectros dos decaimentos em $\pi^+ \pi^- \pi^0, \pi^+ \pi^- \gamma$. Os efeitos, se existirem, são menores que 0.5 %.

Vimos acima que apenas os estados completamente neutros podem ser autoestados da conjugação da carga. Exemplos interessantes desse tipo são aqueles estados formados por partícula -antipartícula. Consideremos por exemplo o positronium, $e^+ e^-$. É sabido que ele decai nos estados formados por dois ou três fótons, i.e,

$$e^+ e^- \rightarrow 2\gamma, 3\gamma.$$

Podemos escrever a função de onda total dos estados do positronium como o produto de três fatores

$$\psi(\text{total}) = \Phi(\text{espacial}) \alpha(\text{spin}) \chi(\text{carga}),$$

onde mostramos a dependência de cada fator explicitamente entre parênteses. Assumamos que temos dois férmions idênticos 1 e 2 em vez de um par férmion-antiférmion. Assim temos o seguinte comportamento sob a troca dos férmions 1 e 2:

$$\begin{aligned} \text{spin: } & (-1)^{s+1} \\ \text{inversão espacial: } & (-1)^l \\ \text{troca da carga: } & \mathcal{C} \end{aligned}$$

As três operações sucessivas são equivalentes à troca total das partículas 1 e 2. Pelo princípio de Pauli, $\psi(\text{total})$ deve ser antissimétrica, logo

$$(-1)^{s+1} (-1)^l \mathcal{C} = -1,$$

que implica que o fator \mathcal{C} deve ser

$$\mathcal{C} = (-1)^{l+s}, \tag{3.111}$$

que no caso do decaimento do positronium em n fótons deve ser igual a $(-1)^n$, pois o fóton é ímpar sob \mathcal{C} .

Dados experimentais indicam que o positronium decai apenas no estado $l = 0$. Temos então duas possibilidades

- i) estado singlete 1S_0 de momento angular total $j = 0$, decai em n par,
- ii) estado tripleto 3S_1 de $j = 1$, decai em n ímpar.

Decaimentos em $4\gamma, 5\gamma$ são menos prováveis por um fator $\alpha^2 \sim 10^{-4}$. O decaimento do tripleto em 2γ também é proibido pela conservação do momento angular.

O caso do próton-antipróton é exatamente análogo ao do positronium.

Também fazemos uma análise semelhante para sistemas bosônicos como $\pi^+\pi^-$. Mas, neste caso, a função de onda deve ser par sob a troca de partículas.

Para $\pi^0\pi^0$ podemos usar dois argumentos. Por uma troca total, temos $\mathcal{C} = (-1)^l$ mas como são bósons idênticos l deve ser par, logo $\mathcal{C} = +1$. Ou também como $\mathcal{C}(\pi^0) = +1$ (do decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) para qualquer configuração espacial. Compare-se com sistemas formados por partícula-antipartícula: neste último caso é necessário saber a configuração espacial.

Os testes experimentais da invariância sob \mathcal{C} baseiam-se na comparação de reações nas quais as partículas são substituídas pelas respectivas antipartículas. Por exemplo, para a interação forte têm sido feitas comparações entre as taxas e espectro de π^+ e π^- nas reações

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ &\rightarrow K^+ + K^- + \dots \end{aligned}$$

Na reação $p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, se o próton produz um π^+ na direção para frente, \bar{p} produz o π^- na direção para trás. Na reação conjugada de carga, $\bar{p}p \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0$, o π^- estaria na direção para frente e o π^+ na direção para trás. Assim, se as interações fortes são invariantes sob \mathcal{C} , a distribuição angular deve ser idêntica para π^+ e π^- . Encontrou-se que uma possível violação de \mathcal{C} deve ser menor que 1%.

Acima, usamos o fato que $\mathcal{C}_\gamma = -1$. Sabemos que as leis do eletromagnetismo são simétricas com relação ao sinal das cargas. De fato, as Equações

de Maxwell no vácuo são

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{3.112}$$

e permanecem invariantes se fizermos $\rho \Rightarrow -\rho$ devemos fazer $\vec{j} \Rightarrow -\vec{j}$, $\vec{E} \Rightarrow -\vec{E}$ e $\vec{B} \Rightarrow -\vec{B}$.

3.13 Inversão Temporal, \mathcal{T}

Esta operação faz basicamente $t \rightarrow -t$. As leis de Newton são obviamente invariantes sob este tipo de transformação pois envolvem derivadas segundas no tempo $\vec{F} = m d^2\vec{x}/dt^2$.

A inversão temporal é uma simetria das interações eletromagnéticas e fortes, mas é violada pelas interações fracas. A carga elétrica é invariante sob inversão temporal enquanto que uma corrente, que é o produto de uma carga pela velocidade, muda de sinal (omitimos a parte espacial):

$$\rho(t) \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho(-t), \quad \vec{j}(t) \xrightarrow{\mathcal{T}} -\vec{j}(-t).
 \tag{3.113}$$

Então as equações de Maxwell serão invariantes sob \mathcal{T} se os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} transformam-se como:

$$\mathcal{T}\vec{E}(t) = \vec{E}(-t)$$

$$\mathcal{T}\vec{B}(t) = -\vec{B}(-t)$$

O vetor de Poynting $\vec{G} = \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{\mathcal{T}} -\vec{G}$, i.e., o fluxo de energia é invertido. Em termos do potencial escalar $A_0(\vec{x}, t)$ e do potencial vetorial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ temos

$$\mathcal{T}A^0(t) = A^0(-t), \quad \mathcal{T}\vec{A}(t) = -\vec{A}(-t),$$

onde para simplificar mostramos apenas a mudança no tempo. As variáveis eletromagnéticas usuais transformam-se sob \mathcal{T} como se mostra na Tabela 3.3. Para comparação também incluímos a transformação sob \mathcal{P} .

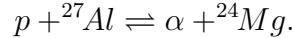
Em 1957, Landau colocou a observação que uma partícula elementar não pode possuir um momento dipolar elétrico estático, se a interação com o fóton

	\mathcal{P}	\mathcal{T}
\vec{x}	$-\vec{x}$	\vec{x}
\vec{p}	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$	$-\vec{\sigma}$
\vec{E}	$-\vec{E}$	\vec{E}
\vec{B}	\vec{B}	$-\vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$
$\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$	$\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$	$-\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)$

Tabela 3.3: Propriedades de transformação de observáveis sob a inversão espacial e temporal.

é invariante sob \mathcal{T} . Posteriormente esse argumento foi aplicado à inversão temporal ou à combinação CP , se assumimos que o teorema \mathcal{CPT} for válido.

Na interação forte, a invariância sob \mathcal{T} é verificada pela aplicação do princípio do balanço detalhado. Na Fig. 3.10 mostra-se o resultado da reação ³¹



Daí segue que uma amplitude que viola- \mathcal{T} , se for diferente de zero, deve ser $< 0.3\%$ da amplitude que conserva \mathcal{T} .

O operador de inversão temporal é diferente do caso de \mathcal{C} e \mathcal{P} . Estes últimos são unitários e Hermitianos, e implicam leis de conservação multiplicativas. O operador \mathcal{T} é *anti-unitário* e não existe uma quantidade como a paridade ou paridade- \mathcal{C} associada a ele. Exemplificamos para o caso de uma partícula não relativística sem spin, mas as características aqui obtidas são gerais o suficiente para que, com modificações apropriadas, aplique-se ao caso relativístico e com spin.

Consideremos a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H(t)\psi(t),$$

que, como no caso clássico de uma equação de difusão, não é invariante sob a troca $t \rightarrow -t$, porque envolve uma derivada primeira no tempo.

³¹W. Von Witsch, A. Richter e P. von Brentano, *Test of Time-Reversal Invariance through the Reactions* ${}^{24}\text{Mg} + \alpha \leftrightarrow {}^{27}\text{Al} + p$, Phys. Rev. **169**, 923(1968).

Se \mathcal{T} é uma operação de simetria

$$[H, \mathcal{T}] = 0,$$

e se ψ e $\mathcal{T}\psi$ obedecem a mesma equação de Schrödinger, para $\mathcal{T}\psi$ temos

$$i\hbar \frac{d\mathcal{T}\psi(t)}{dt} = H\mathcal{T}\psi(t). \quad (3.114)$$

Suponhamos que

$$\mathcal{T}\psi(t) = \psi(-t), \quad (3.115)$$

então a Eq.(3.114) fica (se $t' = -t$)

$$-i\hbar \frac{d\psi(t')}{dt'} = H\psi(t'). \quad (3.116)$$

A Eq. (3.116) não é igual à equação original (3.114). Logo a transformação definida na Eq.(3.115) não é suficiente para caraterizar a inversão temporal. Em 1952, E. Wigner introduziu a transformação \mathcal{T}

$$\mathcal{T}\psi(t) = \psi^*(-t). \quad (3.117)$$

Substituindo $\psi^*(-t)$ na Eq. (3.114) e tomando a conjugada complexa de toda a equação, recuperamos a equação de Schrödinger para $\psi(t)$, se H é real.

Vejam os efeitos de aplicar a transformação \mathcal{T} , Eq.(3.117) a uma partícula livre com momento \vec{p} que tem como função de onda

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}. \quad (3.118)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\psi(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t) &= e^{-i(Et + \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} \\ &= e^{-i[Et - (-\vec{p})\cdot\vec{x}]/\hbar} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Vemos então que $\mathcal{T}\psi$ descreve uma partícula com $-\vec{p}$. Podemos nos perguntar se temos bem definida uma equação de autovalores

$$\mathcal{T}\psi(t) = \eta_T\psi(t).$$

Não, porque \mathcal{T} faz $\psi \rightarrow \psi^*$, entre outras coisas, e a equação de autovalores não tem sentido. Isso está ligado ao fato de, como dissemos acima, \mathcal{T} ser antiunitário.

Lembramos que os operadores unitários são lineares, i.e., se U é um operador unitário

$$U(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1U\psi_1 + c_2U\psi_2,$$

e os antiunitários são anti-lineares, isto é

$$\mathcal{T}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1^*\mathcal{T}\psi_1 + c_2^*\mathcal{T}\psi_2.$$

Tanto os operadores unitários como os antiunitários deixam a norma invariante. A escolha entre as duas possibilidades é determinada pela natureza física das transformações. Para \mathcal{P} e \mathcal{C} , a função de onda transformada satisfaz as equações originais, se a transformação é unitária. Para \mathcal{T} isso ocorre só se \mathcal{T} é antiunitário.

Como \mathcal{T} não tem autovalores observáveis, a invariância sob \mathcal{T} não pode ser testada procurando um decaimento proibido por essa invariância. É necessário usar outros métodos. Por exemplo, o princípio do balanço detalhado e a medida do momento dipolar elétrico de partículas elementares, como o nêutron. Até pouco tempo atrás única evidência indireta da violação de \mathcal{T} era a do sistema de káons, mas recentemente foi observado esse efeito nos méson B . Veremos isso mais adiante.

3.14 Violação de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{CP}

Em 1957, foi observada a violação da paridade em decaimentos fracos. Logo se percebeu que também a conjugação da carga é violada nessas interações.³² Tudo levava a crer, no entanto, que todas as interações conservassem a “inversão combinada”, isto é, \mathcal{CP} . Mas *a física é uma ciência experimental* e os experimentos mostraram, em 1964, que também essa simetria é violada. Ainda hoje é um problema em aberto o mecanismo dessa violação mas o modelo padrão apreço dar conta, por enquanto, do recado.

As experiências foram feitas com káons neutros. Isso trouxe interesse aos testes da invariância sob inversão temporal pois \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} estão relacionados pelo teorema \mathcal{CPT} : *todas as interações são invariantes sob transformações sucessivas de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} em qualquer ordem.*

As conseqüências do teorema \mathcal{CPT} que podem ser verificadas experimentalmente são: partículas e antipartículas devem ter a mesma massa e vida média, e momentos magnéticos iguais em magnitude, mas de sinais opostos.

³²Estudaremos em detalhe isso no capítulo da interação fraca.

Essas inferências poderiam seguir da invariância de \mathcal{C} se esta fosse conservada mas, como dissemos antes, essa simetria é violada pela interação fraca e deve, então, ser baseada no teorema \mathcal{TCP} . Ver no PDG para os dados das vidas médias dos píons, múons e káons carregados, dos momentos magnéticos dos múons e do elétron e das massas dos píons, próton, káons carregados e neutros.

Um teste experimental de particular interesse, da violação de \mathcal{T} ou de \mathcal{CP} , é a detecção de um momento elétrico de uma partícula elementar. Ver Tabela 3.3. Em particular, o caso do nêutron é o melhor estudado, pois existem técnicas de engarrafamento de nêutrons ultrafrios que permitem realizar experiências com nêutrons de velocidades de até 2 m/s, o que facilita a medida das propriedades estáticas do nêutron, como é o caso do EDM (Electric Dipolar Momentum).

Podemos estimar a ordem de grandeza do EDM de uma partícula:

$$\text{EDM} = \text{carga}(e) \times \text{comprimento}(l) \times \mathcal{F}$$

onde \mathcal{F} é o parâmetro que viola \mathcal{T} . O nêutron é neutro, então o EDM deve ser o resultado de uma assimetria, entre as nuvens de carga positiva e negativa, relativa à direção do spin $\vec{\sigma}$, única direção possível para o caso de uma partícula elementar. Ver Fig. 3.11. Assumindo que a interação responsável fosse a interação fraca $l = G_F m_p = 10^{-5}/m_p$ o que implica em

$$\text{EDM} = 10^{-5} \frac{e\mathcal{F}}{m_p} \sim 10^{-19} \mathcal{F} e \text{ cm}$$

onde usamos $\hbar c/m_p = 2 \times 10^{-14}$ cm.

Quanto vale \mathcal{F} ? Se tivermos violação da inversão temporal e da conjugação da carga (para manter \mathcal{TCP}) e violação da conjugação da carga nos decaimentos do méson η , temos que $\mathcal{F} < 10^{-2}$. Nos decaimentos dos káons neutros implica que $\mathcal{F} < 10^{-3}$, logo

$$\text{EDM} < 10^{-22} e \text{ cm}.$$

Recentemente experiências em Grenoble indicam que

$$\text{EDM do nêutron} = d_n < 0.63 \times 10^{-25} e \text{ cm}.$$

Caso se confirme que o nêutron tem uma d_n diferente de zero, um novo desafio estará colocado às teorias de física de partículas elementares.

Quantidade Conservada	Interação		
	Forte	Eletromagnética	Fraca
Energia/Momento	sim	sim	sim
Carga elétrica	sim	sim	sim
B	sim	sim	sim
L	sim	sim	sim
I	sim	não	$\Delta I = 1, 1/2$
S	sim	sim	$\Delta S = 1, 0$
c	sim	sim	$\Delta c = 1, 0$
\mathcal{P}	sim	sim	não
\mathcal{C}	sim	sim	não
\mathcal{CP} ou \mathcal{T}	sim	sim	não
\mathcal{CPT}	sim	sim	sim

Tabela 3.4: As quantidades conservadas em cada interação.

3.15 Resumo das Simetrias

Podemos classificar as simetrias, algumas delas quebradas, em quatro grupos:

1. Simetria de permutações: estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac.
2. Simetrias contínuas espaço-temporais: translações, rotações,...
3. Simetrias discretas: inversão espacial e temporal, conjugação partícula-antipartícula,...
4. Simetrias unitárias (locais e globais): simetrias $U(1)$ relacionadas à conservação da carga, do número bariônico, leptônico; $SU(2)$ como o Isospin; $SU(3)$ como a cor;...; $SU(n)$ de sabor,...

Dessas simetrias, as dos itens 1 e 2, algumas simetrias $U(1)$ e $SU(3)$ de cor, são exatas, as restantes são quebradas.

Para finalizar essa parte de números quânticos conservados aditivamente, apresentamos a Tabela 3.4 que mostra as quantidades que são conservadas ou não por cada uma das interações. Estados bariônicos são mostrados na Tabela 3.5

Nesta tabela Λ, Σ, \dots devem ser entendidos como representando os estados fundamentais. Apenas foi encontrado um estado excitado do Ω (com massa

Nome	I	B	S	c	Multipleteo	Q
N	1/2	+1	0	0	<u>2</u>	+1,0
Δ	3/2	+1	0	0	<u>4</u>	+2,+1,0,-1
Λ	0	+1	-1	0	<u>1</u>	0
Σ	1	+1	-1	0	<u>3</u>	+1,0,-1
Ξ	1/2	+1	-2	0	<u>2</u>	0,-1
Ω	0	+1	-3	0	<u>1</u>	-1
Λ_c	0	+1	0	+1	<u>1</u>	+1
Σ_c	1	+1	0	+1	<u>3</u>	2,1,0

Tabela 3.5: Estados bariônicos e seus números quânticos.

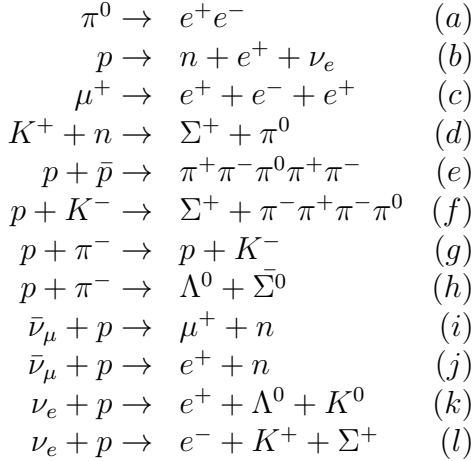
de 1672.45 ± 0.29 MeV), é o $\Omega^-(2250)$ mas ainda não tem o J^P medido. Outros estados como $\Omega^-(2380)$ e $\Omega^-(2470)$ não foram confirmados.

O isospin, a estranheza, o charm,..., são conservados pela interação forte e eletromagnética mas não pela interação fraca. Os decaimentos observados $\Lambda \rightarrow N\pi$, $K \rightarrow \pi\pi$ e $K \rightarrow ll$, violam S e I ; $D \rightarrow K\pi$ e $D \rightarrow Kl$, violam c . Todos os decaimentos têm vida média longa ($\sim 10^{-13}$ s) se comparada à escala típica da interação forte (10^{-23} segundos).

3.16 Exercícios

1. Prove que a corrente conservada pela invariância de fase local e global é a mesma para o caso abeliano $U(1)$.
2. Discutir se as seguintes reações são permitidas ou não pelas leis de

conservação.



3. Verifique todos os números quânticos aditivos nas reações desse capítulo.
4. Se a aniquilação $p\bar{p}$ ocorre em repouso na onda- S , explique porque a reação $p + \bar{p} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ não pode ocorrer via interação forte.
5. Os principais decaimentos do méson- $\eta(549)$ são: a) $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ ($\sim 33\%$); b) $\eta \rightarrow 3\pi^0$ ($\sim 32\%$); e c) $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ($\sim 24\%$). A reação a) é obviamente eletromagnética e, como as reações b) e c) têm taxas comparáveis, devem ser eletromagnéticas também. De fato a vida média é da ordem de 10^{-16} s, isto é, típica desse tipo de reações. Da reação a) temos $\mathcal{C}(\eta) = 1$. O bóson- η tem spin zero. Disto, deduza a paridade do η e verifique se os decaimentos $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-$ e $\eta \rightarrow 2\pi^0$ são possíveis ou não.
6. Verifique a transformação sob \mathcal{C} do par $\pi^+\pi^-$ num estado com momento angular orbital L .
7. Verifique que

$$\{\mathcal{C}, Q, \} = \{\mathcal{C}, B\} = \{\mathcal{C}, L\} = \{\mathcal{C}, S\} = \{\mathcal{C}, I_3\} = 0$$

8. Consulte a parte do PDG relativa às leis de conservação.
9. Verifique, no PDG, aproximadamente quantas das partícula (estáveis ou ressonâncias) têm tido seu spin e paridade medido diretamente.

10. Mostre que para um par de férmions com momento angular orbital L , spin S e isospin I , a função de onda sob a troca dos férmions é:

$$-(-1)^{L+S+I}$$

Justifique que isso implica que $L + S + I$ deve ser ímpar.

11. Aplique o resultado anterior ao caso de um próton e um nêutron. O que pode se dizer sobre os números quânticos desse sistema?

3.17 Referências

Leitura complementar de carácter geral: [Fr91, Hu93, Pe94]. Uma narração da história de física de partículas elementares pode ser encontrada em [Pi84].

Bibliografia

- [BR83] L. M. Brown e L. Hoddeson, *The Birth of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [By73] E. Byckling e K. Kajantie, *Particle Kinematics*, John Wiley, 1973.
- [Co79] G. Costa, *Introduction to the Theory of Weak Interactions*, Notas da Universidade de Padova, 1979.
- [Co83] E. D. Comings e P. H. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks*, Cambridge University Press, 1983.
- [Co01] W. N. Cottingham e D. A. Greenwood, *An Introduction to Nuclear Physics*, 2ª Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Da86] P. C. W. Davies, *The Forces of Nature*, 2ª. Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Di93] R. D' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Fr81] H. Fritsch, *Los Quarks, la Matéria Prima de Nuestro Universo*, Alianza Editorial, 1981.
- [Fr91] H. Frauenfelder e E. M. Henley, *Subatomic Physics*, Prentice Hall, 2ª edição, 1991.
- [Ga66] S. Gasiorowics, *Elementary Particle Physics*, John Wiley, 1966.
- [Ga79] S. Gasiorowicz, *Física Quântica*, Guanabara Dois, 1979.
- [Go84] K. Gottfried e V. Weisskopf, *Concepts of Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1984, vol. I.

- [Go86] K. Gottfried e V. F. Weisskopf, *Concepts of Particle Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1986, vol. II.
- [Gr87] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley, New York, 1987.
- [Ha84] F. Halzen e A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John-Wiley, 1984.
- [Hu93] I. S. Hughes, *Elementary Particles*, 3^a Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Ja73] L. Jauneau, *Historical Introduction from β Radioactivity to the V – A Hypothesis*, em *Weak Interactions*, International School of Elementary Particle Physics Baško Polje, Yugoslavia, 1973, editado por M. Gaillard e M. Nikolic.
- [Ja73b] L. Jauneau, *Introduction to Current Algebra*, Weak Interactions, International School of Elementary Particle Physics, Baško Polje, Yugoslavia 1973, editado por M. Gaillard e M. Nikolic.
- [Ka64] G. Källén, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
- [Ki98] Q. Ho-Kim e X-Y. Pham, *Elementary Particles and Their Interactions*, Springer, Berlin, 1998.
- [Kl87] K. Kleichnecht, *Experimental Test of Gauges Theories*, em 1986 CERN School of Physics, CERN-87-02, 1987.
- [La89] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4a. Edição Pergamon Press, 1989.
- [Le72] B. Lee, Proc. XVI Int. Conf. on High-Energy Physics, NAL, 1972.
- [Le81] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers, 1981.
- [Li70] D. B. Lichtenberg, *Unitary Symmetry and Elementary Particles*, Academic Press, 1970.
- [Lo67] F. E. Low, *Symmetry and Elementary Particles*, Gordon and Breach, 1967.

- [Ma92] B. R. Martin e G. Shaw, *Particle Physics*, John Wiley, 1992. 972.
- [Me69] P. Mermier e E. Sheldon, *Physics of Nuclei and Particles*, vol. I, Academic Press, 1969.
- [Mu94] G. Muller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, 2a. Edicao Springer, Berlin, 1994.
- [Na89] O. Nachtmann, *Elementary Particles: Concepts and Phenomena*, Springer, Berlin, 1989.
- [Pa88] H. R. Pagels, *O Código Cósmico*, GRAVIDA, 1988.
- [Pdg12] J. Beringer, *et al.* (PDG Collaboration), *Phys. Rev. D* **86**, 1 (2012).
- [Pe94] D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, 4^a Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Pi84] A. Pickering, *Constructing Quarks*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [Qu89] H. R. Quinn et al., *Theachers' Resource Book on Fundamental Particles and Interactions*, LBL-26669 1989.
- [Ri01] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, Oxford, 2001
- [Ro96] B. P. Roe, *Particle Physics at the New Millenium*, Springer, New York, 1996.
- [Ro02] J. Rosner, *Resource Letter SM-1: The Standard Model and Beyond*, *Am. J. Phys.* **71** (2003) 302-318.
- [Sa64] J. J Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University Press, 1964. Cap 8.
- [Sc83] F. Scheck, *Leptons, Hadrons and Nuclei*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [ST04] H. Stephani, *Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 3a. Edição.

- [Ve73] M. Veltman, Int. Symp. on Electron and Photon Interactions at High Energies, 1973.
- [We84] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1964; Cap.8.
- [We79] 1979 Nobel Lectures: S. Weinberg, A. Salam e S. L. Glashow, reproduzidos em *Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*, editado por C. H. Lai, World Scientific, 1981.
- [Wi59] E. P. Wigner, *Invariance Principles and Its Applications to Spectroscopy and Nuclear Reactions*, Escuela Latino-Americana de Física, 1959, Universidade de México, pag. 214.
- [Wi92] W. S. C. Williams, *Nuclear and Particle Physics*, Claredon Press, Oxford, 1992.