F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2017
Lista 3

1. Bransdeen and Joachian, página 260
   Seja o seguinte conjunto de operadores: são operadores lineares ? e caso sejam são operadores hermitianos?

   (A) $\hat{A}_1\Psi(x) = (\Psi(x))^2$

   (B) $\hat{A}_2\Psi(x) = \dfrac{d}{dx}\Psi(x)$

   (C) $\hat{A}_3\Psi(x) = \int_0^x \Psi(x')dx'$

   (D) $\hat{A}_4\Psi(x) = x^2\Psi(x)$

   (E) $\hat{A}_5\Psi(x) = \sin\Psi(x)$

   (F) $\hat{A}_6\Psi(x) = \dfrac{d^2}{d^2x}\Psi(x)$

   (G) $\hat{A}_7\Psi(x) = -i\hbar\dfrac{d}{dx}\Psi(x)$

   (H)
   $$\hat{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (I)
   $$\hat{A}_9 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

   (J) $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{R}} \times \hat{\vec{P}}$, onde $\hat{\vec{R}}$ é o operador vetor posição e $\hat{\vec{P}}$ é o operador vetor momento.

2. Mostre que a ação de dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ pode ser representado em forma matricial da seguinte forma : $(AB)_{mn} = \sum_p A_{mp}B_{pn}$.

3. Seja o projetor $\hat{P}_n = |\phi_n\rangle \langle\phi_n|$, onde $|\phi_n\rangle$ são os vetores normalizados de uma base no espaço d Hilbert.

   (A) Mostre que é um operador hermitiano.

   (B) O nome projetor vem do fato da propriedade $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$. Mostre esta propriedade.

   (B) Calcule os autovalores e autovetores.

4. Um Hamiltoniano é dado por

$$H = c^2 \begin{pmatrix} m_\mu & m \\ m & m_\tau \end{pmatrix}$$

   onde m,m_μ, m_τ são números reais e os vetores da base são dados por

$$|\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\nu_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (A) Ache os autovalores e autovetores deste Hamiltoniano.

   (B) Assuma que no instante t=0, o sistema está no estado $|\Psi(t=0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$. Então o sistema no instante t estará no estado $|\Psi(t)\rangle$, determine este estado. Qual é a probabilidade de o sistema estar no estado $|\nu_\tau\rangle$ no instante t?
   Esta probabilidade está relacionado com o Prêmio Nobel de 2015, pela descoberta da oscilação dos neutrinos.
   Ciência Hoje de Dezembro de 2015: Metaformose Fantasmagórica

   (C) A matrix H (1) é Hermitiana? Se sim use a propriedade que pode ser diagonalizada por uma matriz unitária escrita na forma :

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   Mostre que esta matriz é unitária: $U^{-1} = U^\dagger$.
   Diagnolize a matrix H por esta transformação unitária e ache o valor do ângulo θ que diagonaliza esta matrix H. Como podemos achar os autovetores de H usando este procedimento?

5. Griffiths 3.38
O Hamiltoniano de um sistema de três níveis é representado pela matrix

$$\hat{H} = \hbar w \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e tem dois observáveis A e B representados por

$$\hat{A} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde w, λ, μ são reais e positivos.

(A) Os operadores A e B são operadores lineares ? São hermitianos?

(B) Encontre os autovalores e autovetores normalizados de H, A e B.

(C) Quais são os valores possíveis das quantidades H, A e B?

(D) Ache os comutadores entre H, A e B.

(E) Suponha que o sistema começa no estado

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que é um estado normalizado. Encontre os valores esperados de H, A e B em t.

(F) Qual é o estado $|\psi(t)\rangle$? Se você medir a energia no tempo t que valores você pode ter? Qual é a probabilidade de obter cada um destes valores?

6. Seja um espaço de Hilbert three-dimensional com uma base ortonormal $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$:

$$|\Psi\rangle = a|1\rangle = b|2\rangle + a|3\rangle \qquad |\phi\rangle = b|1\rangle + a|2\rangle$$

(A) Calcule $\langle\Psi|, \langle\phi|$. Compute $\langle\Psi|\phi\rangle$ e $\langle\phi|\Psi\rangle$.

(B) Expresse $|\Psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ como vetores columa e recalcule.

(C) Calcule $A = |\Psi\rangle\langle\phi|$. Enontre a representacao 3×3 deste operador.

(D) Calcule $Q = |\Psi\rangle\langle\Psi| + |\phi\rangle\langle\phi|$. Este operador é hermitiano? Mostre que tem um autovalor nulo.

7. Sejam dois operadores A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

descritos na base ortonomal $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$.

(A) Mostre que A e B são operadores hermitianos.

(B) Mostre que A e B comutam.

(C) Ache os autovalores e autovetores de A e B.

(D) Ache uma base comum para os operadores A e B. Mostre a forma de A e B nesta base em comum.

8. Propriedades da função Delta de Dirac:

$$\int_a^b dx f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ 0 & x_0 < a \quad \text{ou} \quad x_0 > b \end{cases}$$

(A) Prove que $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{g'(x_i)}\delta(x - x_i)$ onde $g'(x_i) \equiv \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_i}$ onde x_i são as raízes de $g(x_i) = 0$ se $a < x_i < b$.

(B) $\int_a^b dx f(x)\delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$ se $a < x_0 < b$

9. **Pode ser feito em conjunto**. Dados os operadores contínuos, operador posição $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ e operador momento $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$ que satisfazem as equações de autovalores:

$$\begin{array}{ll} \hat{X}\,|r\rangle = x\,|r\rangle & \hat{P}_x\,|p\rangle = p_x\,|p\rangle \\ \hat{Y}\,|r\rangle = y\,|r\rangle & \hat{P}_y\,|p\rangle = p_y\,|p\rangle \\ \hat{Z}\,|r\rangle = z\,|r\rangle & \hat{P}_z\,|p\rangle = p_z\,|p\rangle \end{array}$$

Admita que estes operadores estão definidos em todo o espaço vetorial: $(-\infty, \infty)$.

(A) Mostre que os operadores $\hat{X}$ e $\hat{P}_x$ são operadores hermitianos.

(B) Calcule os comutadores $[\,X, P_x\,]$ e $[\,Y, P_x\,]$.

(C) Com esta informação os operadores $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{P}_x$ são um conjunto completo de observáveis que comuta (C.C.O.C.)? Justifique a sua resposta.

(D)Com esta informação os operadores $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$ são um conjunto completo de observáveis que comuta (C.C.O.C.)? Justifique a sua resposta.

(E) Dada a equação de autovalores de $\hat{P}_x$, $\hat{P}_x\,|p\rangle = p_x\,|p\rangle$, ache os autovetores deste sistema na representação de posição x.
É dado que a matriz de mudancça da base de momento $|p\rangle$ para a base de posição $|r\rangle$ é $\langle r|p\rangle = v^*_{\vec{p}}(\vec{r}) = \dfrac{e^{-i\vec{p}.\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$.

10. **Pode ser feito em conjunto**. Seja o operador momento angular em coordenadas esfércias

$$\hat{L}_z \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

onde ϕ é a coordenada no sistema de coordenadas esférica com valores entre 0 e 2π. .

(A) Quais são as condições para que $\hat{L}_z$ seja hermitiano?

11. Bransdeen and Joachian, página 260:
Seja um partícula de massa m em 1 dimensão espacial, sob a ação do Hamltoniano $H = \dfrac{p_x^2}{2m}$.

    (A) Mostre que os autovalores do Hamiltoniano H são duplamente denegarados.

    (B) Mostre que a degenerescência pode ser removida por considerar autovetores de H e de p_x.

    (C) No caso do poço do potencial infinito as soluções são autovetores de H e de p_x ?Se não são como podemos escrever a solução para ser um autovetor de H e de p_x.

12. **Pode ser feito em conjunto**. Seja o oscilador harmônico unidimensional, e o estado fundamental do sistema é $|0\rangle$. Seja o Hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (mwx)^2\right) = \hbar w\left(N + 1/2\right) \tag{2}$$

Onde $\langle x|0\rangle \equiv \psi_0(x) = \left(\dfrac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-mwx^2/2\hbar}$ é a função de onda do estado fundamental. N é o operador número com propriedades

$$N = a_+ a_- \quad E_n = \hbar w(n + 1/2), n = 0, 1, ...$$

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(\mp i p_x + mwx\right) \quad [\, a, a_+ \,] = 1 \quad [$$

$$a_+ \left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$$

    (A) Ache a expressão do estado $|n\rangle$ em termos de operadores escada a_+ e a_- e do estado fundamental do sistesma $|0\rangle$.

    (B) Escreve a equação diferencial da função de onda do estado fundamental $\langle\psi|0\rangle$ e ache a solução: $\psi_0(x)$.. Não é necessário determinar a constante de normalização.

    (C) O Hamiltoniano de um sistema em uma dimenão tem a forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{K\hat{x}^2}{2} + \frac{e\Phi_0\hat{x}}{a}$$

onde K, e, ϕ_0 e a são constantes positivas. Ache os autovalores e autovetores deste sistema.

13. Responda as questões justificando se a sentença está correta ou não.

(A) Operadores hermitianos tem autovalores que podem ser reais ou imaginários.

(B) Se o sistema esta no autovetor de um operador Q, então o valor esperado de um operador Q' será independente do tempo se Q e Q' comutam.

(C) O autovetor de qualquer operador não é um estado estacionário.

(D) Se você faz uma medida de uma quantidade observável Q de um sistema de forma repetida e quase instantanea então você espera obter o mesmo valor em cada medida.

(E) Uma partícula está submetida a um potencial de oscilador harmônico. Se a partícula está num estado de autoestado do operador momento então o valor esperado do operador Q não depende do tempo.

(F) Uma partícula está submetida a um potencial de oscilador harmônico. Se a partícula está num estado de autoestado do operador energia então o valor esperado do operador Q depende do tempo.

(G) Dois operadores de comutam A e A' então eles sempre são representados por matrizes diagonais.

(H) O desvio padrão do valor esperado de um operador A que é hermitiano é não nuo.