F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2017
Lista 4

1. Seja o operador translação espacial $\hat{T}_a$ dado por

$$\hat{T}_a = e^{-i\vec{a}.\hat{\vec{P}}/\hbar} \tag{1}$$

onde $\hat{\vec{P}}$ é o operador momento e $\vec{a}$ é um vetor arbitrário.

(B) $\hat{T}_a =$ é hermitiano?

(A) Mostre as seguintes propriedades deste operador

$$\begin{aligned} \hat{T}_a\hat{T}_b &= \hat{T}_b\hat{T}_a \\ (\hat{T}_a)^{-1} &= \hat{T}_{-a} = (\hat{T}_a)^\dagger \\ \hat{T}_a(\hat{T}_a)^\dagger &= I \end{aligned} \tag{2}$$

estes propriedades correspondem ao que chamamos de grupo abeliano.

(C) Calcule $\left[\hat{T}_a, \dfrac{\hat{\vec{P}}^2}{2m}\right]$

(D) Qual é a condição para que $\left[\hat{T}_a, \hat{V}(x)\right] = 0$?

2. O estado fundamental do oscilador harmônico unidimensional é dado por

$$a_- \left|0\right\rangle = 0 \tag{3}$$

onde o operador $a_- \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(+i\hat{P} + mw\hat{X}\right)$ é o operador de destruição do oscilador harmônico unidimensional. O operador posição $\hat{X}$ na representação de posição tem a propriedade de $\hat{X}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle$. Portanto a equação 3 é dada por

$$\begin{aligned} \left\langle x\right| a_- \left|0\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(\left\langle x\right| i\hat{P}\left|0\right\rangle + \left\langle x\right|\hat{X}\left|0\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(\left\langle x\right|(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\left|0\right\rangle + \left\langle x\right| x\left|0\right\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle + x\langle x|0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x) + x\psi_0(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

onde $\psi_0(x)$ é a função de onda do estado fundamental. E a equação diferencial do estado fundamental é

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x) + x\psi_0(x)\right) = 0$$

(A) Na representação de momento qual é a forma do operador posição? Em outras palavras demosntre que

$$\langle p|\,\hat{X}\,|\psi\rangle = \langle p|\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\,|\psi\rangle$$

(B) Use o resultado do item (A) para achar a equação diferencial na representação de momento.

(C) Solucione esta equação do item (B).

3. A equação 3 pode ser generalizada para a expressão:

$$a_{\text{-}}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{4}$$

(A) A quantidade α é real ou imaginária?

(B) Expresse a solução da equação 5 em termos de uma série da solução do oscilador harmônico: $|\alpha\rangle = \sum_n c_n\,|n\rangle$. Ache c_n usando as propriedades do operador $a_{\text{-}}$.
Resposta : $c_{n+1} = \dfrac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}}$ e que $|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0} \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$. A constante $c_0 = e^{-|\alpha|^2}$. Esta solução é chamado estado coerente.

(B) Mostre que o valor médio da posição é $\langle x\rangle_\alpha = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2mw}}\,(\alpha+\alpha^*)$ e que o valor médio do momento é $\langle p\rangle_\alpha = -i\sqrt{\dfrac{mw\hbar}{2}}\,(\alpha-\alpha^*)$. O índice α significa que a média é feita no estado $|\alpha\rangle$.

(C) Mostre que o produto do desvio padrão da posição e do momento é

$$(\Delta x)_\alpha(\Delta p)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \tag{5}$$

e portanto todos os estados coerentes tem dispersão mínima possível.