F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2017
Lista 5

1. Problema 4.18 do Griffiths. Mostre que o coeficiente A_l^m da Equação (4.120) é

$$L_\pm f_m^l = (A_l^m)\, f_{m\pm 1}^l \qquad (1)$$

é dado por

$$(A_l^m) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} = \sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)} \qquad (2)$$

2. Um sistema está num estado de superposição de estados de momento angular

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|l=1, m=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|l=1m=1\rangle \qquad (3)$$

(A) Calcule $\langle L^2\rangle, \langle L_x\rangle, \langle L_y\rangle, \langle L_z\rangle, \langle L_z^2\rangle$.
Resposta:

$$\left\langle L^2\right\rangle = 2\hbar^2 \quad \left\langle L_x\right\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \quad \left\langle L_y\right\rangle = 0 \quad \left\langle L_z\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \quad \left\langle L_z^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

(B) Uma medida de L_z é feita com valor $\hbar$, quais os possíveis valores de L_x após a medida?
Resposta:
$L_x = -\hbar, 0, \hbar.$

(C) Uma medida de L_z é feita com valor $\hbar$, qual é a probabilidade de medir L_x com valor $+\hbar$?

3. Resolva o item d do Problema 4.19 do Griffith
Resposta:

$$[\, L_i, P_j \,] = -i\hbar\epsilon_{ijl}P_l \qquad \left[V(\hat{R}), L_i \right] = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(\hat{R})}{\partial R_i}$$

Se o potencial é central então

$$\frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R_i} = \frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{\partial |R|}{\partial R_i} = \frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{R_i}{R}$$

e portanto

$$\left[V(\hat{R}), L_i \right] = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(\hat{R})}{\partial R_i} = i\hbar\epsilon_{ikl}R_k\frac{\partial V(|\hat{R}|)}{\partial R}\frac{R_i}{R} = 0$$

pois um quantidade simétrica R_kR_i vezes uma quantidade anti-simétrica ϵ_{ikl} é nula.

4. A base deste sistema são os autovalores de L^2 e L_z.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

O operador $\hat{L}_x$ para o momento angular l=1 é dada por

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

com autovalores $\hbar, 0, -\hbar$. Os autovetores são

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(A) Se o Hamiltoniano é dado por

$$H = \hbar w \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

e se o estado do sistema é

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{2}i \\ 7 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Se medirmos o observável L_x, qual a probabilidade de medirmos $\hbar$? Qual é o estado do sistema imediatamente após a medida?
Resposta:

$$P(m_x = 1/2) = 1/2 \quad |\psi_1\rangle = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle \to |\psi_1\rangle = |1\rangle$$

(B) O estado do sistema imediatamente após a medida de L_z é um autoestado de energia? Se sim qual é? Se não explique o porquê.

(C) Dado o sistema $|\psi(0)\rangle$ do item (a), encontre o ket $|\Psi(t)\rangle$?

(D) Suponha que medimos L_x no estado $|\Psi(t)\rangle$, qual é a probabilidade de encontrarmos o valor $+\hbar$?

5. Se uma partícula está no estado

$$\psi(\theta, \phi, 0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\phi\sin\theta\cos\theta \tag{9}$$

Dado:

$$Y_2^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi} \quad Y_2^{-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}$$

(A) Quais os possíveis valores de L_z podem ser medidos e quais a probabilidade de ocorrerem?
Resposta:
$l = 1 m_z = 1$ e $m_z = -1$.

(B) Qual é $\langle L_y\rangle$ para este estado?

(C) Qual é $\langle L^2 \rangle$ para este estado?

Resposta:

$$\left\langle L^2 \right\rangle = 2\hbar^2 \tag{10}$$