F689 Mecânica Quântica
Turma B
1^o Semestre de 2017
Prova 2

Nome: RA: Assinatura :

Hamiltoniano do oscilador harmônico $\left(w = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (mwx)^2\right) = \hbar w\left(N + 1/2\right) \qquad N = a_+ a_- \quad E_n = \hbar w(n + 1/2), n = 0, 1, ...$$
$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m w}}\left(\mp i p_x + mwx\right) \quad [\, a_, a_+\,] = 1 \quad [\, a_-, H\,] = \hbar w a_- \qquad [\, a_+, H\,] = -\hbar w a_+$$
$$a_+ \left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle \quad a_- \left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \tag{1}$$

Onde $\langle x|0\rangle \equiv \psi_0(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-mwx^2/(2\hbar)}$ é a função de onda do estado fundamental.

Propriedades das bases infinitas de momento $|p\rangle$ e de posição $|r\rangle$:

$$\langle r|p\rangle = v_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{p}.\vec{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \qquad \int d\vec{r}'\, |r'\rangle\langle r'| = 1 \quad \langle r\,|\psi\rangle \equiv \psi(\vec{r}) = \int d^3p\, v^*_{\vec{p}}(\vec{r})\overline{\psi}(\vec{p})$$
$$\int d\vec{p}\,'\, |p\,'\rangle\langle p\,'| = 1 \quad \langle p|\psi\rangle \equiv \overline{\psi}(\vec{p}) = \int d^3r\, v^*_{\vec{p}}(\vec{r})\psi(\vec{r})$$
$$\frac{d\left\langle \hat{Q}\right\rangle}{dt} \equiv \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\, \hat{H}, \hat{Q}\,\right]\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t}\right\rangle \qquad i\hbar\frac{\partial\left|\Psi\right\rangle}{\partial t} = H\left|\Psi\right\rangle$$

1. (Valor da questão 2.0) Responda as questões justificando se a sentença está correta ou não.

   (A) (Valor do item 0.4) O desvio padrão do valor esperado de um operador hermitiano $\hat{A}$, $(\sigma_{\hat{A}})^2 \equiv \left\langle \hat{A}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{A} \right\rangle^2$ para kets que sejam autovetores de $\hat{A}$ é sempre nulo.

   (B) (Valor do item 0.4) Se dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam então os operadores sempre são representados por matrizes diagonais em qualquer base.

   (C) (Valor do item 0.4) Quais das seguintes afirmações são corretas para para qualquer estado $|\Psi\rangle$? Escolha todas as alternativas corretas.

   - (1) $\hat{H}\,|\Psi\rangle$ fornece o resultado da medida de energia no estado Ψ.
   - (2) Imediatamente após uma medida de energia, o sistema está no estado $\hat{H}\,|\Psi\rangle$.
   - (3) Existe um estado de energia definida E associado com o estado $|\Psi\rangle$ dado por $\hat{H}\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle$.
   - (4) Nenhuma das alternativas anteriores.

   (D) (Valor do item 0.4) Se um sistema está num autoestado de $\hat{Q}$ então o sistema irá permanecer neste estado até ser perturbado por uma medida? Esta afirmação é verdadeira ou falsa para *todos* os operadores $\hat{Q}$.

   - (1) Verdadeiro
   - (2) Falso

   (E) (Valor do item 0.4) Qual é raciocinio de tua resposta na questão anterior? Escolha todas as alternativas corretas.

   - (1) O sistema irá permanecer um autoestado do operador $\hat{Q}$ até a medida de um operador que não comute com $\hat{Q}$.
   - (2) O valor esperado do operador $\hat{Q}$ é indepedente do tempo.
   - (3) O Hamiltoniano não comuta com $\hat{Q}$.
   - (4) O Operador $\hat{Q}$ poderá ter uma dependência temporal.
   - (5) O Hamiltoniano $\hat{H}$ poderá ter uma dependência temporal.

2. (Valor da questão 3.5) O Hamiltoniano de um sistema de três níveis e dois observáveis A e B são representados poré representado pela matrizes

$$\hat{H} = \hbar w \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \eta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde w, η, μ são reais e positivos. Suponha que o sistema começa no estado normalizado $(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1)$.

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(A) (Valor do item 1.5) Encontre os autovalores e autovetores normalizados de $\hat{H}, \hat{A}$ e $\hat{B}$.

(B) (Valor do item 0.5) No instante muito próximo à t=0 é feito uma medida do operador $\hat{A}$ e foi medida o valor η. Qual é a probabilidade disto ocorrer?

(C) (Valor do item 0.5) No instante muito próximo à t=0 é feito uma medida do operador $\hat{B}$ e foi medida o valor μ. Qual é a probabilidade disto ocorrer?

(D) (Valor do item 0.5) No instante muito próximo à t=0 é feito uma medida do operador $\hat{A}$ e sucessivamente foi medido o operador $\hat{B}$, respectivamente com valores η e μ. Quais são os estados após a medida de $\hat{A}$? E após a medida de $\hat{B}$?. Qual é a probabilidade de ocorrer estas duas medidas *consecutivas* de η e μ respectivamente?

(E) (Valor do item 0.5) No instante muito próximo à t=0 é feito uma medida do operador $\hat{B}$ e sucessivamente foi medido o operador $\hat{A}$, respectivamente com valores μ e η. Calcule a probabilidade desta duas medidas *consecutivas* nestas condições e compare com a resposta do item (D)?

3. (Valor da questão 2.5) Seja o oscilador harmônico unidimensional definido pelo Hamiltoniano da Equação (1), O estado fundamental do sistema é $|0\rangle$ e o primeiro estado excitado é escrito como $|1\rangle$.

   (A) (Valor do item 0.5) Qual é o autovalor do do primeiro estado excitado $|1\rangle$?

   (B) (Valor do item 1.0) Ache a função de onda do primeiro estado excitado $\psi_1(x)$.

   (C) (Valor do item 1.0) O Hamiltoniano de um sistema em duas dimensões tem a forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{mw^2\hat{x}^2}{2} + \frac{mw^2\hat{y}^2}{2}$$

   onde w e m são constantes positivas. Quais são os autovalores deste Hamiltoniano?

4. (Valor da questão 2.0) Dados os operadores contínuos, operador posição $\hat{\mathbf{R}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ e operador momento $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$ que satisfazem as equações de autovalores:

$$\begin{array}{ll} \hat{X}\,|r\rangle = x\,|r\rangle & \hat{P}_x\,|p\rangle = p_x\,|p\rangle \\ \hat{Y}\,|r\rangle = y\,|r\rangle & \hat{P}_y\,|p\rangle = p_y\,|p\rangle \\ \hat{Z}\,|r\rangle = z\,|r\rangle & \hat{P}_z\,|p\rangle = p_z\,|p\rangle \end{array}$$

Admita que estes operadores estão definidos em todo o espaço vetorial: $(-\infty, \infty)$.

(A) (Valor do item 1.0) Prove que o operador $\hat{P}_x$ é hermitiano. Quais são os autovalores do operador $\hat{P}_x$?

(B) (Valor do item 1.0) Assuma que estamos em uma dimensão. Qual é a forma do operador $\hat{X}$ na representação de momento, $|p\rangle$? Quais são os autovetores do operador $\hat{X}$ na representação de momento $|p\rangle$?