F689 Mecânica Quântica
Turma A
1^o Semestre de 2017
Prova 3

Nome: RA: Assinatura :

Dados:

$$\left[\hat{L}^2, L_i\right] = 0 \quad \left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad \hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$

$$\left[\hat{L}_\pm, \hat{L}^2\right] = 0 \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z \quad \hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \quad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}^2 \left|l\ m_z\right\rangle = l(l+1)\hbar^2 \left|l\ m_z\right\rangle \quad \hat{L}_z \left|l\ m_z\right\rangle = m_z\hbar \left|l\ m_z\right\rangle \quad -l < m_z < l$$

A representação dos $\hat{L}_z$ na base z é

$$\hat{L}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Os kets do operador spin na direção $\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, +\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ na base S^2, S_z é

$$\left|S_n = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad \left|S_n = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ -\cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad \langle r\,\theta\,\varphi|l\ m_l\rangle = Y_l^m(\theta,\varphi)$$

A representação dos $\hat{L}_i$ na base de posição é

$$\hat{L}_x = i\hbar\left\{\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \quad \hat{L}_y = i\hbar\left\{-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \quad \hat{L}_z - i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\right\} \quad \hat{L}_\mp = \hbar e^{\pm i\varphi}\left\{\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$$

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{i\varphi} \quad Y_1^{-1} = +\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{-i\varphi} \quad Y_1^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}\cos\theta$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} \quad Y_2^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2}(3\cos\theta^2 - 1) \quad Y_l^{-m} = (-1)^m(Y_l^m)^*$$

1. (3.0 pontos) Considere um sistema físico formado por um espaço de Hilbert de dimensão 3, que é formado por três autovetores $|l\, m_z\rangle$ de $\hat{L}^2$ e de $\hat{L}_z$ ($-l < m_z < l$) com respectivamente autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m_z\hbar$ tais que

$$\hat{L}_{\pm}\,|l\ m_z\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m_z(m_z\pm 1)}\,|l\ m_z\pm 1\rangle \quad \hat{L}_{+}\,|l\ l\rangle = \hat{L}_{-}\,|l\ \ -l\rangle = 0$$

(A) (1.5 pontos) Encontre a representação matricial de $\hat{L}_{\pm}$ na base $|l\, m_z\rangle$.

Resposta

É dito no problema que a dimensão é três, então devemos ter l=1 e portanto $m_l = -1, 0, 1$.

Para montar a expressão matricial de $\hat{L}_{\pm}$ devemos então usar as equações dadas para os três kets do sistema: $|1\ -1\rangle$, $|1\, 0\rangle$ e $|1\ +1\rangle$. Usando a expressão dada temos

$$\begin{aligned}
&\hat{L}_{+}\,|1\ \ -1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-(-1)(-1+1)}\,|1\ \ -1+1\rangle = \sqrt{2}\,|1\ 0\rangle \\
&\hat{L}_{+}\,|1\ 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-(0)(0+1)}\,|1\ 0+1\rangle = \sqrt{2}\,|1\ 1\rangle \\
&\hat{L}_{+}\,|1\ 1\rangle = 0 \quad \hat{L}_{-}\,|1\ \ -1\rangle = 0 \\
&\hat{L}_{-}\,|1\ 0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-(0)(0-1)}\,|1\ \ -1\rangle = \sqrt{2}\,|1\ \ -1\rangle \\
&\hat{L}_{-}\,|1\ 1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-(1)(1-1)}\,|1\ 0\rangle = \sqrt{2}\,|1\ 0\rangle
\end{aligned} \tag{1}$$

Na base $|1\ 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |1\ 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ $\quad |1\ \ -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Temos que a representação matricial de $\hat{L}_{\pm}$ é

$$L_{+} \quad \left\{ \begin{array}{c} |1\ \ -1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ 1\rangle \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}\,|1\ 0\rangle \\ \sqrt{2}\,|1\ 1\rangle \\ 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

$=$

$$(L_{+}) = \quad \begin{pmatrix} \langle 1\ 1\,|L_{+}|\,1\ 1\rangle & \langle 1\ 1\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle & \langle 1\ 1\,|L_{+}|\,1\ -1\rangle \\ \langle 1\,1\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle & \langle 1\ -1\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle & \langle 1\ -1\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle \\ \langle 1\,1\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle & \langle 1\ 0\,|L_{+}|\,1\ 0\rangle & \langle 1\ 0\,|L_{+}|\,1\ -1\rangle \end{pmatrix}$$

Ou use a forma

$$(L_+) = \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

E usa as fórmulas de recorrência na equação 1, os coeficientes a,b,c,d,e,f,g,h e f. Obtemos das duas formas que

$$(L_+) = \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e usando $\hat{L}_- = (\hat{L}^\dagger_)$ temos que

$$(L_-) = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

(B) (1.5 pontos) Escreva os estados normalizados $|l\, m_z\rangle$ em termos dos autoestados de $\hat{L}^2$ e de $\hat{L}_x$.

Resposta

Em outras palavras ache os autovetores de $\hat{L}^2$ e de $\hat{L}_x$. Do formulário temos $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, invertendo temos que $\hat{L}_x = \dfrac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2}$, portanto

$$(L_x) = \quad \begin{pmatrix} 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \\ \hbar/\sqrt{2} & 0 & \hbar/\sqrt{2} \\ 0 & \hbar/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Para achar os autovetores temos que

$$L_x \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Os autovalores são $(l, m_x) = (1, -1), (1, 0), (1, 1)$. As incognitas a,b e c são obtidas das equações $(\hbar/\sqrt{2})b = \lambda a, (\hbar/\sqrt{2})(a+c) = \lambda b, (\hbar/\sqrt{2})c =$

λc que implica a=c para não nulos autovalores e portanto $a = \dfrac{\lambda b}{\hbar\sqrt{2}}$.
Para o autovalor $\lambda = 0$ temos a +c=0 e b=0:

$$|1\ 0\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e para os outros autovalores $\lambda = \pm\hbar$,

$$|1\ \pm\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{\pm b}{\sqrt{2}} \\ b \\ \dfrac{\pm b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e por normalização $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ temos que

$$|1\ \ \pm 1\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. (4.0 pontos) Seja uma partícula de spin 1/2 com momento magnético $\vec{M} = \gamma\vec{S}$. Os estados de spin são são descritos na *base* $|+\rangle$ *e* $|-\rangle$, *que são respectivamente os autovetores de* $\hat{S}_z$ *com autovalores* $\hbar/2$ *e* $-\hbar/2$. No tempo t=0, o estado do sistema é

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle \tag{3}$$

(A) (1.0 pontos) Se o observável $\hat{S}_y$ é medido no tempo t=0, quais são os resultados possíveis e com quais as probabilidades podemos obter estes resultados?

Resposta

Como é uma partícula de spin 1/2, então o autovalor de S^2 é s=1/2 e portanto os valores possíveis de $\hat{S}_y$ são $\pm\frac{\hbar}{2}$. Para sabaermos as probabilidades usamos a resposta dada no formúlario do estado do spin numa direção arbitrária. Na direção y, temos $\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ que para direção y é $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\left|S_n = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad \left|S_n = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ -\cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

temos que

$$\left|S_y = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4)e^{-i\pi/4} \\ \sin(\pi/4)e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\theta'}$$

O outro estado é o estado ortogonal pois $\hat{S}_y$ é hermitiano. Portanto a probabilidade de obter este autovalor é 1/2 e a outro autovalor por conseqência é 1/2 também.

(B) (2.0 pontos) Assuma que a medida mencionado no item (A) **não foi realizada**. Assuma que o sistema evolue sobra a influência de um campo magnético com o Hamiltoniano dado por $H = -\vec{M}.\vec{B}$. O campos magnético tem somente a componente na direção $\hat{x}$ e com módulo B_0. Calcule o estado do sistema no **instante t** na base $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Compare o estado do sistema instante t=0 com o o estado do sistema no tempo $t = \frac{4\pi}{\gamma B_0}$.

Resposta

Neste $\vec{B} = B_0\hat{y}$ então o Hamiltoniano é $H = -M_x B_o = -\gamma S_x B_o$. Se o estado do sistema no instante t então precisamos achar os autovalores da energia.

$$H\left|\Psi\right\rangle = -\gamma S_x B_o \left|\Psi\right\rangle$$

Sabemos a equação dos spins temos que

$$\hat{S}^2 \left|s\ m_x\right\rangle = s(s+1)\hbar^2 \left|s\ m_x\right\rangle \quad \hat{S}_x \left|s\ m_x\right\rangle = m_x\hbar \left|s\ m_x\right\rangle$$

com $m_x = \pm\dfrac{1}{2}$. Como o Hamiltoniano comuta com $\hat{S}_x$ e portanto com $\hat{S}^2$ temos que tem autovetores em comum. Então temos que $\left|\Psi\right\rangle \to \left|s\ m_x\right\rangle$, com isto temos que

$$H\left|\Psi\right\rangle = -\gamma S_x B_o \left|\Psi\right\rangle = (-\gamma B_o) S_x \left|s\ m_x\right\rangle = (-\gamma B_o) m_x\hbar \left|s\ m_x\right\rangle = H\hbar \left|s\ m_x\right\rangle$$

Portanto a energia é $E = (-\gamma B_o) m_x \hbar$. O sistema está no instante inicial no autoestado de S^2 e de S_z, $\left|+\right\rangle$. Devemos reescrever este ket na base de S_x. Usando o formulário temos que $\hat{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ que para direção x é $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $\varphi = 0$:

$$\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e o estado ortogonal

$$\left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Portanto o estado inicial é

$$\left|\Psi(t=0)\right\rangle = \left|+\right\rangle = \frac{\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle}{2}$$

Portanto o estado do sistema no instante t é

$$\begin{aligned} \left|\Psi(t)\right\rangle &= \left|+\right\rangle = \frac{\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{-iE_+t/\hbar} + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{-iE_-t/\hbar}}{2} \\ &= \frac{\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{+i(\gamma B_o)t/2} + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{-i(\gamma B_o)t/2}}{2} \end{aligned}$$

No instante $t = \dfrac{4\pi}{\gamma B_0}$ o sistema é

$$\left|\Psi(\frac{4\pi}{\gamma B_0})\right\rangle = \frac{\frac{S_x=+\frac{\hbar}{2}}{e}^{-i2\pi} + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{+i2\pi}}{2} = |\Psi(t=0)\rangle$$

É o mesmo estado.

(C) (1.0 pontos) Quais são os valores médios dos observáveis $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ no **instante t**?

Resposta

O valor médio é $\left\langle \hat{S}_y \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{S}_y \right| \Psi \right\rangle$ é calculado na representação matricial:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{S}_x \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{S}_x \right| \Psi \right\rangle &= \frac{1}{4}\left(\left\langle S_x = +\frac{\hbar}{2}\right| e^{+i(\gamma B_o)t/2} + \left\langle S_x = -\frac{\hbar}{2}\right| e^{-i(\gamma B_o)t/2}\right) \hat{S}_y \\
&\quad \times \left(\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{+i(\gamma B_o)t/2} + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{-i(\gamma B_o)t/2}\right) \\
&= \hbar \sin\frac{\gamma B_o t}{2}\cos\frac{\gamma B_o t}{2} = \frac{\hbar}{2}\sin\gamma B_o t
\end{aligned}$$

e para $\left\langle \hat{S}_z \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{S}_z \right| \Psi \right\rangle$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{S}_z \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{S}_z \right| \Psi \right\rangle &= \frac{1}{4}\left(\left\langle S_x = +\frac{\hbar}{2}\right| e^{+i(\gamma B_o)t/2} + \left\langle S_x = -\frac{\hbar}{2}\right| e^{-i(\gamma B_o)t/2}\right) \hat{S}_z \\
&\quad \times \left(\left|S_x = +\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{+i(\gamma B_o)t/2} + \left|S_x = -\frac{\hbar}{2}\right\rangle e^{-i(\gamma B_o)t/2}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\gamma B_o t}{2} - \sin^2\frac{\gamma B_o t}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\gamma B_o t\right)
\end{aligned}$$

3. (3.0 pontos) Um sistema tem como Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_\perp} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_\parallel}$$

onde $I_\perp$ e $I_\parallel$ são respectivamente os momentos de inércia perpendiculares e paralelos a direção z. $\hat{L}_i$ i=x,y,z são os operadores de momento angular.

(A) (1.0 pontos) Calcule os autovalores de energia deste sistema e as autofunções.

Resposta

O Hamiltoniano acima é escrito em termos de $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$, a forma específica pode ser escrita usando $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2$ então

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I_\perp} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_\parallel} = \frac{\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2}{2I_\perp} + \frac{\hat{L}_z^2}{2I_\parallel} = \frac{\hat{L}^2}{2I_\perp} + \hat{L}_z^2 \left(\frac{1}{2I_\parallel} - \frac{1}{2I_\perp} \right)$$

Então o Hamiltoniano comuta com $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$, então possuí os mesmos autovetores, que são os kets $|l \; m_z\rangle$ que na representação em posição são os harmônicos esféricos.

Usando a equação de autovalores de $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ dada no formulário temos que os autoestados de energia correspondem a trocar $\hat{L}^2 \to l(l+1)\hbar^2$ e $\hat{L}_z \to m_z\hbar$ então as energias são

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\hat{L}^2}{2I_\perp} + \hat{L}_z^2 \left(\frac{1}{2I_\parallel} - \frac{1}{2I_\perp} \right) \right) \Bigg|_{\hat{L}^2 \to l(l+1)\hbar^2, \hat{L}_z \to m_z\hbar} \\ &= \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_\perp} + m_z^2\hbar^2 \left(\frac{1}{2I_\parallel} - \frac{1}{2I_\perp} \right) \end{aligned}$$

(B) (1.0 pontos) Em t=0 o sistema está no estado **normalizado**

$$\psi(t=0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \cos\varphi$$

Mostre que o estado acima é um autoestado de energia.

Resposta

Este estado pode ser escrito como uma combinação de estados Y_1^1 e Y_1^{-1}, temos que

$$\psi(t=0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^{-1}$$

Estes estados tem l=1 e $m_z = \pm 1$, e como a energia é degenerada em relação a proje ccão do momento angular na direção z, então ambas funções de onda tem a mesma energia, então o estado inicial é um autoestado de energia.

(C) (1.0 pontos) Demonstre se o estado inicial do item (B) é ou não é um autoestado de momento angular.

Resposta

O estado inicial conforme achado na questão anterior é a soma de dois estados de momento angular na direção diferentes (e portanto respectivamente tem dois autovalores diferentes). Por estas razões o estado inicial não é um autoestado de momento angular.