F315- Mecânica Clássica —Lista 2 - 2^o Semestre de 2017

1. Uma bola é lançada para cima com força de arrasto proporcional a velocidade ao quadrado, $F_{\text{arrasto}} = bv^2$.

   • (a) Escreva as equações de movimento para quando o objeto está subindo e mostre que pode ser escrita na forma (assumindo que se o eixo y positivo está na direção para cima)

$$\dot{v} = -g\left[1 + \left(\frac{v}{v_{\text{te}}}\right)^2\right]$$

   onde v_{te} é a velocidade terminal.

   • (b) Usando a transformação $\dot{v} \to v\frac{dv}{dy}$ (demonstre esta relação), você pode escrever uma equação de v em função da posição y. Mostre que a altura máxima é dada por

$$y_{\max} = \frac{v_{\text{te}}^2}{2g} ln\left(\frac{v_{\text{te}}^2 + v_0^2}{v_{\text{te}}^2}\right)$$

   onde v_{te} é a velocidade terminal e v_0 é a velocidade inicial.
   Resposta:

$$\frac{v_y dv_y}{1 + \frac{v_y^2}{v_{\text{te}}^2}} = -g dy$$

2. Uma objeto de massa m é lançado horizontalmente numa superfície, e está submetido a ação de uma força de arrasto que pode descrita como composta de dois termos: um termo proporconal a velocidade (com uma constante b) e outro termo proporcional a velocidade ao quadrado (com uma constante c).

   (a) Escreva a equação de movimento do sistema, descrevendo claramente as convenções usadas .

   (b) Resolve a equação de movimento para velocidade e obtenha v=v(t), assumindo que em t=0, $v(t = 0) = v_0$

   (c) Qual é o valor da velocidade quando $t \to \infty$?

   (d) Ache a relação entre a velocidade e a posição, a relação v=v(x), assumindo que em $x = x_0 \quad v(x_0) = v_0$.

3. Uma partícula carregada de massa m e carga q movendo sobre a ação de campos elétricos e magnéticos constantes, com **E** na direção y e com **B** na direção z. A força de Lorentz que a partícula carregada sofre é $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Suponha que a partícula é inicialmente na origem com velocidade inicial v_x^0, somente na direção x.

   - (a) Escreva as equações de movimento. Mostre que a partícula permanece no plano z=0.

   Resposta:

$$m\frac{dv_x}{dt} = qv_yB \quad m\frac{dv_y}{dt} = -qv_xB \quad m\frac{dv_z}{dt} = 0$$

   - (b) Prove que existe um valor de velocidade inicial v_x^0, chamado velocidade de deriva, v_{der} de tal modo que a partícula não é afetada pelos campos elétricos e magnéticos combinados.

   Resposta:

$$0 = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\text{der}} \times \mathbf{B}\right)$$

   - (c) Resolva as equações de movimento para valores arbitrários de v_x^0 (Estas equações são semelhantes as resolvidas em sala de aula. É possível relacionar as duas equações por uma transformação de variáveis, $u_x = v_x - v_{\text{der}}$.)

   Resposta:

$$v_y = (v_{\text{der}} - v_x^0)\sin(wt) \quad v_x = v_{\text{der}} - (v_{\text{der}} - v_x^0)\cos(wt) \quad v_z = 0$$

   - (d) Integre as soluções encontradas no item anterior para obter a posição em função do tempo. Descreva o movimento que corresponde a esta solução.

   Resposta:

$$y(t) = \frac{(v_{\text{der}} - v_x^0)}{w}(1 - \cos(wt)) \quad x(t) = v_{\text{der}}t - \frac{(v_{\text{der}} - v_x^0)}{w}\sin(wt) \quad z(t) = 0$$

4. Seja uma massa m pendurado num fio, de massa zero, e de comprimento l, conforme a Figura 1. O fio está preso ao teto e

pode se mover-se livremente no plano vertical. A posição do fio pode ser completamente especificada por um ângulo ϕ, medido a partir da posição vertical.

(a) Escreva a energia potencial do sistema, em termos do ângulo ϕ e dos parâmetros comprimento do fio, l e da massa do objeto m.

(b) Escreva a energia total do sistema em função de ϕ e de $\dot{\phi}$.

(c) **Use a expressão da energia encontrada no item anterior** para achar a solução $\phi(t)$, na aproximação de pequeno ângulos $\phi << 1$. Mostre que o movimento é periódico e encontre o período deste movimento.

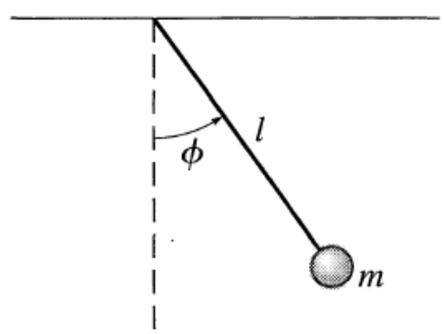

Figura 1: Pêndulo simples de comprimento l, com uma objeto de massa m presa a uma das pontas.

5. Suponha uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ tenha a propriedade $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Do teorema de Stokes temos que $\int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ é , a cada instante t fixo, independente do caminho entre 1 e 2. Mostre que com isto a energia potencial, a cada instante t, tem a propriedade que $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$. A energia é conservada ou não neste caso?

6. A prova que a força Coulumbiana, $\mathbf{F} = \dfrac{\gamma \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, é conservativa é muito mais simples se calcularmos o rotacional da força $\nabla \times \mathbf{F}$ em coordenadas esféricas. Deduzir esta fórmula é um longo

cálculo, mas você pode assumir a fórmula como dada, por exemplo no Marion, página 811, Apêndice F3. Mostre que é conservativo e mostre explicitamente que a força pode ser escrita como $\mathbf{F} = -\nabla U$.

7. Uma partícula move-se sob a ação do potencial, $V(x) = ax^4 - bx^2$.

   (a) Determine a força.

   (b) Esboçe o gráfico de V(x) e descreva os movimentos possíveis.

   (c) Encontre a velocidade máxima da partícula em $x_0 = -\sqrt{\dfrac{b}{2a}}$ para esta permaneça confinada á região $x < 0$.

   (d) Calcule o período de pequenas oscilações em torno dos pontos de equilíbrio estável.

8. Responda se verdadeiro ou falso.

   (a) Um pêndulo simples tem o período independente da amplitude se o ângulo em relação à vertical for pequeno. No caso de amplitudes maiores, o período irá aumentar.

   (b) No lançamento de uma bola na vertical temos que a altura máxima atingida é menor no caso com resistência do ar comparada com o caso em resistência do ar. O tempo de subida com resistência é menor do que no caso sem resistência. Admita que a velocidade inicial é igual no caso sem resistência e com resistência do ar.

9. Quais destas afirmações são verdadeiras para que a energia mecânica de um sistema seja conservada?

   (a) o sistema seja isolado

   (b) as forças derivem de potenciais

   (c) a energia cinética seja constante

   (d) se possa calcular o trabalho da forças ao longo de um caminho qualquer

   (e) as forças dependem da posição e não da velocidade

   (f) o trabalho realizado para mudar de configuração do sistema não dependa dos caminhos seguidos.