F315- Mecânica Clássica —Lista 3- 1^o Semestre de 2017

1. A força elástica exercida por uma mola unidimensional é dada por F=-kx, onde x é a distância do deslocamento da mola em relação ao ponto de equílibrio. Assumindo que esta força é conservativa (como é mesmo), então a energia potencial é dada por U=kx^2/2, onde escolhemos que a energia potencial no ponto do equilíbrio é zero.

   (a) Se pendurarmos a mola na direção vertical presa ao teto, com uma massa m suspensa na extremidade livre. Encontre o valor do novo ponto de equilíbrio x_0, quando a massa está suspensa na mola. Encontre a energia potencial total, mola mais gravidade, pode ser escrita como U=ky^2/2, onde y é a deslocamento em relação a novo ponto de equilíbrio, x_0 (assumindo que a energia potencial é zero no ponto y=x_0).
   Resposta
   $U(y) = \frac{k}{2}\left(y - \frac{mg}{k}\right)^2$

2. Considere uma massa m presa a uma mola de constante k e que apenas se move no eixo horizontal x. Se colocarmos a origem do sistema de coordenadas no ponto de equilíbrio da mola, a energia potencial é $U = \frac{1}{2}kx^2$. No tempo t=0, a massa está em repouso é impulsionada para a direita até um ponto máximo de deslocamento $x_{\max} = A$ e continua a oscilar em torno da origem.

   (a) Escreva as equações de conservação de energia e isole a velocidade $\dot{x}$ em termos da posição x e da energia total E.
   Resposta:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}{m}}$$

   (b) Mostre que $E = \frac{1}{2}kA^2$, e use isto para eliminar E da fórmula da velocidade $\dot{x}$. Use a fórmula

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')}$$

para encontrar o tempo que leva a partícula da origem até a posição x.

Resposta:

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\dot{x}(x')} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}}$$

(c) Inverta a equação do item (c) para achar a posição em função do tempo t e mostre qua a massa m executa um movimento harmônico simples com período T=$2\pi\sqrt{m/k}$.

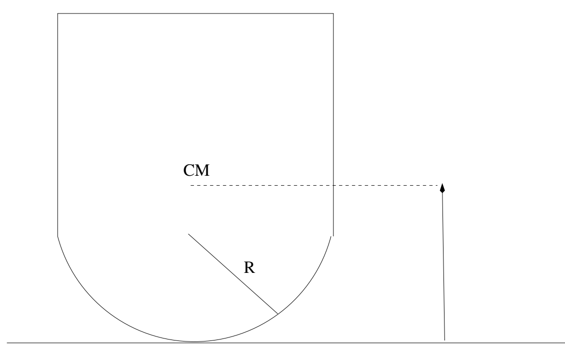

Figura 1: Um brinquedo de criança, conforme a figura abaixo, que é um semi-hemisfério de raio R, com um cilindro no topo.

3. Um brinquedo de criança, conforme a Figura 1, que é um semi-hemisfério de raio R, com um cilindro no topo. O centro de massa do objeto está localizado numa altura h a partir do chão.

   (a) Escreva a energia potencial gravitacional do objeto, quando o objeto é movido um ângulo θ em relação a vertical (sugestão: você precisa encontrar a altura h em função de θ. Não é necessário calcular o momento de inércia do objeto.

   Resposta

   $U(\theta) = mgh\,(h - R)\cos\theta + mgR$

   Ponto de referência, ponto para $\theta = 0$.

   (b) Para quais valores de h e R, o ângulo $\theta = 0$ é um equilíbrio estável ?

   Resposta

   Se $R > h$ o equilíbrio é estável.

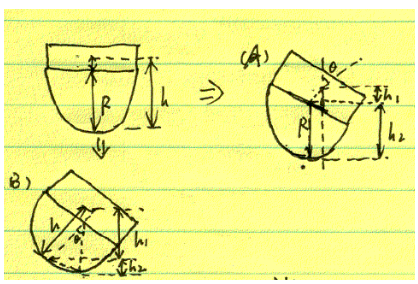

Figura 2: Geometria do cálculo da altura: eu usei a solução A. A solução B é aproximada.

4. Uma bola de metal com um furo por toda a sua extensão é suspensa pelo teto. uma corda de massa zero e comprimento l está amarrada com a bola em um dos lados, e está suspensa por uma polia, e do outro lado está suspensa uma massa M como mostrado na Figura 2. As posições das duas massas são completamente especificadas por um único ângulo θ.

   (a) Escreva a energia potencial $U(\theta)$ (sugestão, escreva em termos das alturas h e H mostradas na figura. Escreve estas duas variáveis em termos de θ e das constantes b e l).

   Resposta

   O comprimento l é o comprimento total da corda, então l=H+x,

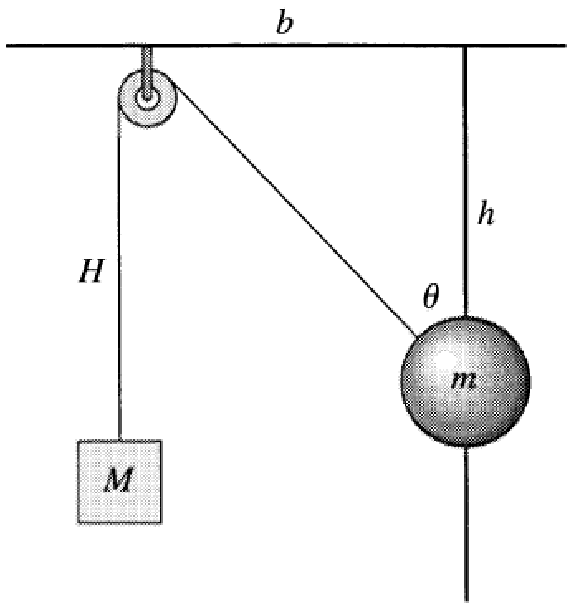

Figura 3: Uma bola de metal com um furo por toda a sua extensão é suspensa pelo teto. uma corda de massa zero e comprimento l está amarrada com a bola em um dos lados, e está suspensa por uma polia, e do outro lado está suspensa uma massa M.

onde x é dado pelo trinagulo rentangulo, $\sin\theta = \frac{b}{x}$. do mesmo triângulo retñagulo temos $\tan\theta = \frac{b}{h}$.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema (sugestão: derivando a energia potencial em função de θ). Quais são as condições sobre as massas m e M para que o equilíbrio sejá estável?