F315- Mecânica Clássica —Lista 4- 1^o Semestre de 2013

1. O movimento harmônico simples pode ser descrito de 4 formas diferentes

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-iwt} \quad (I) \\
&= B_1 \cos(wt) + B_2 \sin(wt) \quad (II) \\
&= A \cos(wt - \delta) \quad (III) \\
&= Re(Ce^{iwt}) \quad (IV)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   (a) Prove que todas as fórmulas são equivalentes, i.e. podemos a partir de uma delas chegar as outras formas.

   (b) Dê as expressões das constantes de uma das forma em termo das constantes da outra forma, i.e. C_1 e C_2 em termo de B_1 e B_2.

   (c) Use a forma (III) para escrever as constantes A e δ em termos da posição inicial $x(t = 0) = x_0$, e a velocidade inicial $\dot{x}(t = 0) = v_0$.

   (d) Mostre o comportamento em dois casos limites:
   $x(t = 0) = x_0 = 0$ e $\dot{x}(t = 0) = v_0 \neq 0$
   e
   $x(t = 0) = x_0 \neq 0$ e $\dot{x}(t = 0) = v_0 = 0$.
   Você encontrará que respectivamente $A = \dfrac{v_0}{w}$ e $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, se $v_0 > 0$; e $A = x_0$ e $\delta = 0$.

2. Mostre que a taxa de decaimento, i.e. a taxa de decréscimo exponencial para os casos super-amortecido, sub-amortecido e críticamente amortecido é respectivamente $\beta - \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$, β e w_0. A partir disto, qual destes movimentos é o ideal para uma porta de um auditório, quando queremos que rapidamente a oscilação seja amortecida?

3. No caso do oscilador super-amortecido calcule os coeficientes A_1 e A_2 da solução em termo da posição inicial e da velocidade inicial. Mostre o comportamento qualitativo de x(t) quando $x(t = 0) = x_0 = 0$ e $\dot{x}(t = 0) = v_0 \neq 0$

e
$x(t=0) = x_0 \neq 0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0 = 0$.

4. Mostre o espaço de fase, i.e. o plano x, $\dot{x}$(i.e. escreva a função $\dot{x}(x)$) para uma partícula em movimento harmônco simples, sem força de arrasto. Qual o formato das curvas de níveis neste caso?

   (a) Faça o mesmo para o movimento super-amortecido no caso em que $x(t=0) = x_0 = 0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0 \neq 0$. Compare os dois casos: harmônico simples e super-amortecido.

5. Ache a solução do oscilador harmônico forçado de duas formas.

   (a) Na primeira forma, partimos da equação do oscilador harmônico forçado

   $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f_0 \cos(wt) \tag{2}$$

   Assuma uma solução particular

   $$x_p = A\cos(wt - \delta) \tag{3}$$

   e ache a expressão de A e de δ.

   (b) Na segunda forma, se existe uma solução da Eq.(2) para uma força $f_0 \cos(wt)$, então existe uma solução para a força $f_0 \sin(wt)$, que chamaremos de y(t):

   $$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + w_0^2 y = f_0 \sin(wt) \tag{4}$$

   Definindo a função complexa $z(t) = x(t) + jy(t)$, onde i é a unidade imaginária $i^2 = -1$, então a função z(t) satisfaz

   $$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + w_0^2 z = f_0 e^{iwt} \tag{5}$$

   onde foi usado a propriedade $e^{iwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$.
   Assuma uma solução particular $z_p = Be^{iwt}$ e ache a expressão de B.
   Mostre que podemos escrever $B = De^{-i\delta}$ obtendo as expressões de D e de δ.
   A solução x(t) se obtém através de x(t)= Re (z(t)).

6. Seja um oscilador harmônico forçado, com constante de amortecimento β muito menor do que a frequência natural w_0. Assuma que está submetida a uma força externa de frequência

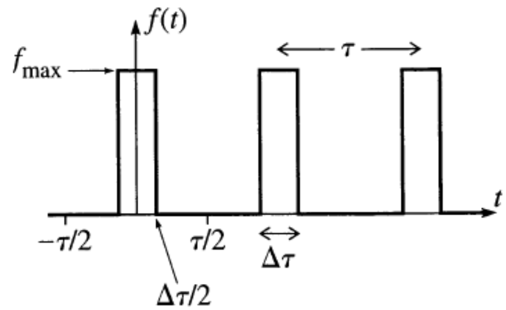

Figura 1: Seja uma força externa por unidade de massa dada por esta função.

variável w.

(a) Mostre que a amplitude A, da Eq. 3 tem um valor máximo para a frequência ressonante $w_r = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$.

(b) Mostre que as frequências w_- e w_+, onde a amplitude A , da Eq. 3 tem um valor igual a metade do valor máximo corresponde, $A = \dfrac{A_{max}}{2}$ são iguais a $w_- = w_0 - \beta$, e $w_+ = w_0 + \beta$.

7. Seja um oscilador harmônico forçado submetido a força por unidade de massa dada na Fig.1.

(a) Calcule os coeficientes da série de Fourier, e escreva a forma da solução particular completa.

Resposta:

$a_n = \dfrac{2f_{\max}}{\pi n} \cos\left(\dfrac{\pi n \Delta\tau}{\tau}\right) \quad a_0 = \dfrac{f_{\max}\Delta\tau}{\tau}$

(b) Neste caso existe a componente $a_0 \neq 0$, mostre explicitamente que a solução do oscilador harmônico forçado submetido a uma força constante (i.e. o termo a_0), pode ser achada colocando uma função tentativa

$$x_p = A' \tag{6}$$

onde A' é uma constante. Ache o valor de A'.

Resposta:

$A' = \dfrac{f_{\max}\Delta\tau}{w_0^2\tau}$.

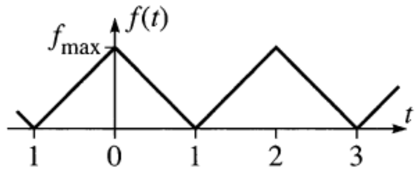

Figura 2: Seja uma força externa por unidade de massa dada por esta função.

8. Seja um oscilador harmônico forçado submetido a força por unidade de massa dada na Fig.2.

   (a) Calcule os coeficientes da série de Fourier, e escreva a forma da solução particular completa. **Resposta:** Assumindo $f_{max} = 1$ então $a_n = 0$ se n é par ; $a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}$ se n é ímpar ; $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

9. (Tarefa especial a ser feito com o PAD) Seja um massa m preso por duas molas conforme a Fig. 3, o qual mostra o estado de equilíbrio do sistema para x=y=0. Num instante t, a mola é puxada verticamente para a posição (x,y) (assuma que a direção x é na ao longo da posição de equilíbrio mostrada na Fig. 3 , e a direção y é ortogonal a direção mostrada na Fig. 3.

   (a) Mostre que para x e y pequenos, o potencial é dado pela forma do oscilador harmônico não-isótropico:

$$U(x,y) = \frac{k_x x^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2}$$

   Encontre as expressões de k_x e k_y.

   (b) Uma questão mais complicada é se o ponto (x,y)=(0,0) é estável ou instável.

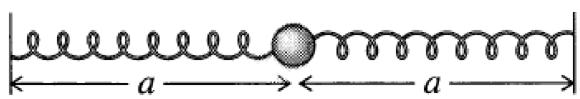

Figura 3: Um massa de massa m é presa por duas molas. Ambas molas tem como comprimento da mola não esticada l_0. Quando em equilíbrio o sistema apresenta a configuração mostrada. Note que l_0 é diferente da distância a.