# F315- Mecânica Clássica —Lista 2- $1^o$ Semestre de 2017

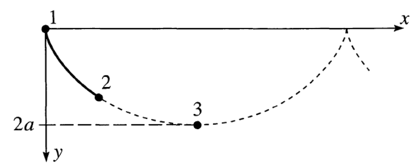


Figura 1: Trajetória do objeto onde 1 é o ponto inicial e 3 o ponto final, o ponto 2 é um ponto intermediário entre 1 e 3.

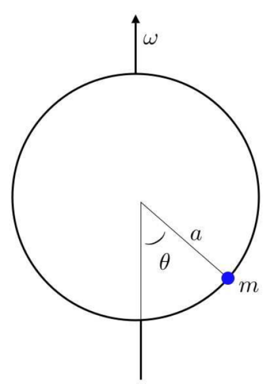


Figura 2: Partícula de massa m presa num bambole, que está girando com velocidade angular w.

1. **Terceira questão especial**, Seja um cilindro de seção reta circular com raio R com centro no eixo z. Qualquer ponto da superfície do cilindro pode ser descrito por coordenadas cilíndricas $(R, \phi, z)$.

   (a) Encontre a equação que relaciona a variavel $\phi$ das coordernadas cilindricas como um função de z para o caminho mais curto entre os dois pontos, a chamada *geodésica*.

   (b) A solução é única? Discuta sobre isto.

   (c) Se abrirmos o cilindro e o desenrolamos, a equação encontrada no item (a) corresponde ao qual movimento ?

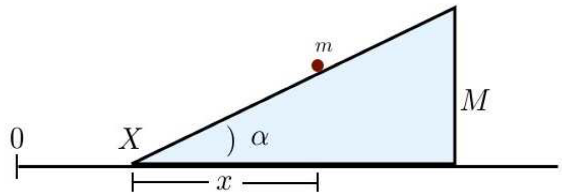


Figura 3: Uma partícula de massa m em cima de uma cunha de massa M.

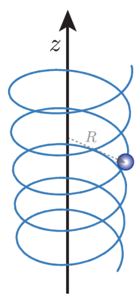


Figura 4: Seja uma partícula de massa m circulando ao longo de uma hélice.

2. Em sala de aula foi encontrada a a equação da ciclóide dada por

$$y = a(1 - \cos\theta) \quad x = a(\theta - \sin\theta) \tag{1}$$

que é a equação que minimiza o tempo entre o ponto mais alto da trajetória e o ponto mais baixo da trajetória cuja forma está mostrada na Figura 1.

(a) Ache o significado do ângulo $\theta$ desta equação e descreva este ângulo na figura da ciclóide. O ponto mais baixo da trajetŕoria corresponde a $\theta = \pi$ e o ponto mais alto a $\theta = 0$.

(b) Calcule o tempo deste movimento quando o corpo é solto em repouso do ponto mais alto até o ponto mais baixo da trajetória.

(c) No caso em que o corpo não é solto do ponto mais alto, mas de um ponto intermediário calcule o tempo que leva deste ponto até o ponto mais baixo. O resultado é igual ao resultado

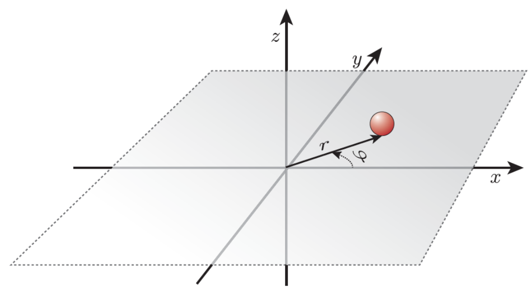


Figura 5: Seja uma partícula de massa m andando numa superfície bidimensional submetido a uma força central.

do item (a), o que é muito contra-intuitivo. Relembre que as equações mostradas na Equação 1 são apenas para o caso em que é solto do ponto mais alto. No caso geral temos que

$$y = a(1 - \cos\theta) \quad x = a(\theta - \sin\theta) + \text{constante} \tag{2}$$

ache a constante em função do ponto genérico $x_2, y_2$, que pode ser descrito pelo ângulo $\theta_2$ que fica entre $x_1, y_1$ e $x_3, y_3$.

3. Seja a Figura 3 que representa uma partícula de massa m em cima de uma cunha de massa M. Tanto a partícula de massa m como a cunha de massa M estão andando numa superfície sem atrito.

   (a) Quais são os vínculos deste sistema?

   (b) Quais são as variavéis independentes?

   (c) Escreva o Lagrangiano deste sistema.

   **Resposta**
   (a) A cunha anda somente na horizontal, $\mathcal{Y} = 0$
   (b) A posição da partícula de massa m e da cunha contando a partir da ponto mais a esquerda.
   (c) A posição da partícula de massa m iremos chamar de x e a posição da cunha de X.

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathcal{X}}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \tag{3}$$

   e a relação $y = x\tan\alpha$, $\alpha$ é o ângulo em relação a vertical.

4. Uma partiícula de massa m está andando ao longo de uma hélice conforme mostrado na Figura 4. A equação desta hélice é dada por em coordenadas cilíndricas por $\theta = \alpha z$, aonde $\alpha$ é uma constante com dimensão de inversa da distância. Veja a descrição desta hélice no link Hélice no wikipédia.

   (a) Quais são os vínculos deste sistema?

   (b) Quais são as variavéis independentes?

   (c) Escreva o Lagrangiano deste sistema.

   **Resposta**
   (a) O vínculo é r=R e a condição mencionada $\theta = \alpha z$. (b) Em coordenadas cilíndricas, temos que $r, \theta, z$

$$L = \frac{1}{2} m \left(1 + \alpha^2 R^2\right) \dot{z}^2 - mgz \tag{4}$$

5. Uma partícula de massa m está presa num bambole, de raio $a$, que está girando em torno de um eixo vertical com velocidade angular $w$ constante conforme a Figura 2.

   (a) Neste sistema quantos vínculos existem e quantas variavéis independentes (graus de liberdade) existem?

   (A) dois vínculos, 2 graus de liberdade

   (B) dois vínculos, 1 grau de liberdade

   (C) dois vínculos, nenhum grau de liberdade

   (D) um vínculo, 2 graus de liberdade

   (E) um vínculo, 1 grau de liberdade

   Diga quais são estes vínculos.

   (b) A lagrangiana pode ser escrita na forma :

$$L = L(\theta, \dot{\theta}) = T - U \tag{5}$$

   que em geral depende em coordenadas esféricas de $\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}$. Neste caso o raio é constante $r$=$a$. A taxa de variação do

ângulo $\phi$ é constante $\dot{\phi} \to w$. Ache a energia cinética em coordenadas esféricas com raio constante e co taxa de variação do ângulo $\dot{\phi} = w$ constante. A energia potencial também pode ser escrita em termos do ângulo $\theta$ em relação ao eixo vertical.
**Resposta**:

$$L = \frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mga(1-\cos\theta) \tag{6}$$

(c) A Lagrangiana pode ser escrita na forma :

$$L = \frac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2 - U_{\text{eff}}(\theta) \tag{7}$$

aonde $U_{\text{eff}}(\theta)$ é um potencial efetivo que depende apenas da variável $\theta$. Ache este potencial efetivo. Escreva a equação de Euler-Lagrange na variável $\theta$.
**Resposta**:

$$U_{\text{eff}}(\theta) \equiv \frac{p_\varphi^2}{2ma^2\sin^2\theta} + mga(1-\cos\theta) \tag{8}$$

onde

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{9}$$

(d) O potencial efetivo achado no item (b) pode ser escrito usado para achar os pontos estáveis e instáveis deste movimento. Neste caso a forma do potencial depende do valor relativo de $w_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$ e de $w$. Desenhe no caso em que

- : $w_0^2 > w^2$.

- : $w_0^2 < w^2$.

Ache os pontos estáveis e instáveis nos dois casos acima descritos. Como você pode descrever o movimento nestes dois casos?
**Resposta**:

Para $w_0^2 > w^2$ o ponto $\theta = 0$ é estável e para $w_0^2 < w^2$ o ponto $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{w_0^2}{w^2}\right)$ é estável. O ponto $\theta = \pi$ é um ponto instável.

(e) **Extrenamente difícil** No caso de $w_0^2 < w^2$, temos um ponto de equilíbrio estável pata $\theta \neq 0$. Como é possível ter um ponto de equilíbrio que não seja ao redor de $\theta = 0$ ? Análise os termos do potencial efetivo no caso em que $w_0^2 < w^2$, e veja as forças envolvidas.

(e) Veja na página a demonstração do movimento do bambolê. Veja a Figura 4 como rotações nos dois casos mencionados no item (d):
Link para artigo sobre este problema.

6. Uma partiícula de massa m está num plano bidimensional submetido a uma força central conforme mostrado na Figura 5.

(a) Ache o Lagrangiano do sistema.

(b) Ache os momentos generalizados deste sistema.

(c) Alguns destes momentos generalizados são constantes? Existem variavéis cíclicas neste sistema?

(d) Assuma que a força é dada por $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}F_r + \hat{\theta}F_\theta$, com $F_\theta = 0$ e $F_r = -kr$.

(e) Ache as velocidades em termos dos momentos generalizados.

(f) Calcule o hamiltoniano.

(g) Quais são as quantidades conservadas neste sistema?

(h) Neste caso a energia total é igual ao Hamiltoniano?

(i) Quais são as simetrias presentes neste sistema?

7. Seja o Lagrangiano de um sistema de dois corpos submetido a uma força central é dado por

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{k}{r} \tag{10}$$

(a) Mude o tempo da forma $t \to t' = t + C$, onde C é uma constante. Isto é uma simetria do Lagrangiano? Qual é a quantidade conservada neste caso?

(b) Se fizermos a tranformação de uma rotação finitapor um ângulo $\alpha$ então:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{11}$$

Assuma o caso de uma rotação infinitesimal, como muda o lagrangiano por esta transformação? No caso de o Lagrangiano não se alterar, isto é uma simetria do Lagrangiano, qual é a quantidade conservada?