**F315 Mecânica Clássica I**
**Turma B**
**2$^o$ Semestre de 2017**
**Prova 1**

Nome: RA: Assinatura :

Dados:

$$\int \left(\frac{dx}{x^2 - A^2}\right) = -\frac{1}{A}\ \text{arctanh}\left(\frac{x}{A}\right) \quad \int \frac{dx}{x - A} = \log(x - A) \quad \int \frac{xdx}{x + A} = x + A\log(x - A)$$

$$U(x) = (U)_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)}{1!}\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_{x=x_0} + ...$$

$$ma_y = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = m\frac{dv_y}{dy}v_y$$

$$\vec{v} = \vec{\dot{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{1}$$

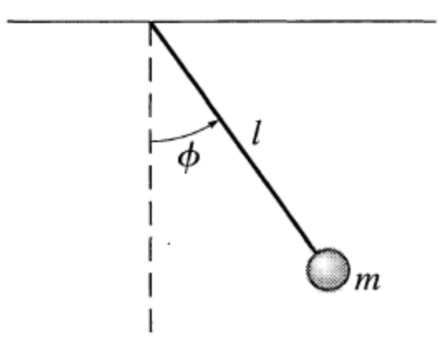


Figura 1: Pêndulo simples de comprimento l, com uma objeto de massa m presa a uma das pontas.

1. (3.2 pontos) Uma objeto de massa m é lançado verticamente para cima com velocidade $v_0$ e assuma que no instante inicial esteja na origem das coordenadas. Denote a aceleração da gravidade por g.

(a) (0.5 pontos) Escreva a Lei de Newton desde sistema descrevendo claramente as convenções usadas.
**Resposta:**
Escolhendo o sistema de coordenadas com y na direção vertical e x na direção horizontal.
Neste caso a única força é a gravidade então temos

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\rm res} \quad F_{\rm res} = -mg \quad \to m\frac{dv_y}{dt} = -mg \tag{2}$$

Movimento uniformente acelerado, com condições iniciais: $y(t = 0) = 0$ e $v_y = \dot{y}(t = 0) = v_0$:

$$y(t) = c_1 + c_2 t - \frac{gt^2}{2} \quad \to y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \tag{3}$$

com as condições inicias, temos $c_1 = 0$ e $c_2 = v_0$.

(b) (0.5 pontos) No ponto mais alto da trajetória, qual é a velocidade e aceleração do objeto? Determine a altura máxima do objeto.
**Resposta:**
No ponto mais alto da trajetória temos que a velocidade é zero e a aceleração é a=-g. De outra forma como o sistema ś conservativo então no instante inicial temos

$$E = m\frac{v_0^2}{2} + U(x_0) = m\frac{v_0^2}{2} = 0 + mgh \tag{4}$$

então $h = \dfrac{\left(m\dfrac{v_0^2}{2}\right)}{mg} = \dfrac{v_0^2}{2g}$

(c) (1.2 pontos) Assuma que o mesmo objeto, lançado verticamente para cima com velocidade $v_0$, está submetido a uma força adicional resistiva que pode descrita um termo proporcional a velocidade (com uma constante b). Descreve o sistema de equações neste caso e ache a velocidade no instante t.
**Resposta:**

Neste caso as forças presentes são a gravidade e a força resistiva então temos

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{resis}} = m\vec{g} - b\vec{v} \quad m\frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y \tag{5}$$

Isolando a velocidade temos

$$\frac{dv_y}{v_y + mg/b} = -\frac{bdt}{m} \tag{6}$$

Integrando do instante inicial no solo, $v_y(t = 0) = v_0$ até o instante t temos

$$\ln\left(\frac{v_y(t) + mg/b}{v_0 + mg/b}\right) = -\frac{bt}{m} \quad v_y(t) = (v_0 + mg/b)\, e^{-\left(\frac{bt}{m}\right)} - \frac{mg}{b} \tag{7}$$

Fisicamente a partícula sobe até uma certa altura h e depois começa a cair.

(d) (1.0 pontos) No ponto mais alto da trajetória, qual é a velocidade e aceleração do objeto do item (c) ? Determine o tempo para se chegar a esta velocidade.

**Resposta:**

No instante mais alto a partícula irá parar de andar até parar, ai começará a cair. No ponto mais alto da trajetória temos que $v_y(t_{\text{max}}) = 0$ e neste ponto temos que a aceleração será de

$$a_y(t_{\text{max}}) = \left(\frac{-mg - bv_y}{m}\right)\Bigg|_{t_{\text{max}}} = -g \tag{8}$$

onde $t_{\text{max}}$ corresponde ao tempo que se atinge a altura máxima. Para obter $t_{\text{max}}$ fazemos $v_y \to 0$ na equação (7). Então

$$v_y(t_{\text{max}}) = 0 \to 0 = (v_0 + mg/b)\, e^{-\left(\frac{bt_{\text{max}}}{m}\right)} - \frac{mg}{b} \quad t_{\text{max}} = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{v_0 + mg/b}{mg/b}\right) \tag{9}$$

confirmando que quando $mg/b << v_0$ temos $t_{\text{max}} \sim \frac{v_0}{g}$ e recuperamos o caso sem força resistiva.

(e) Questão extra (0.5 pontos) Qual é a altura máxima que o objeto chega no caso em que está submetido a uma força adicional resistiva que pode descrita um termo proporcional a velocidade (com uma constante b)? Assuma que foi lançado com velocidade $v_0$.

**Resposta:**

Existem duas maneiras, na primeira integramos a velocidade,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t v_y(t)dt = \int_0^t dt\left[(v_0 + mg/b)\, e^{-\left(\frac{bt}{m}\right)} - \frac{mg}{b}\right] \\
&= (v_0 + mg/b)\int_0^t dt e^{-\left(\frac{bt}{m}\right)} - t\left(\frac{mg}{b}\right) \\
=- &\quad (v_0 + mg/b)\left(\frac{m}{b}\right)\left(e^{-\left(\frac{bt}{m}\right)} - 1\right) - t\left(\frac{mg}{b}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

No altura máxima temos que sastifazer a condição da Eq. 9, e portanto

$$y_{\max} = y(t)|_{t_{\max}} = -(v_0 + mg/b)\left(\frac{m}{b}\right)\left(\frac{mg/b}{v_0 + mg/b} - 1\right) \quad - \quad t_{\max}\left(\frac{mg}{b}\right)$$

$$y_{\max} = +\left(\frac{m}{b}\right)\left(\frac{v_0}{v_0 + mg/b}\right) - t_{\max}\left(\frac{mg}{b}\right)$$

$$y_{\max} = +\left(\frac{m}{b}\right)\left(\frac{v_0}{v_0 + mg/b}\right) - \frac{m}{b}\ln\left(\frac{v_0 + mg/b}{mg/b}\right)\left(\frac{mg}{b}\right) \tag{11}$$

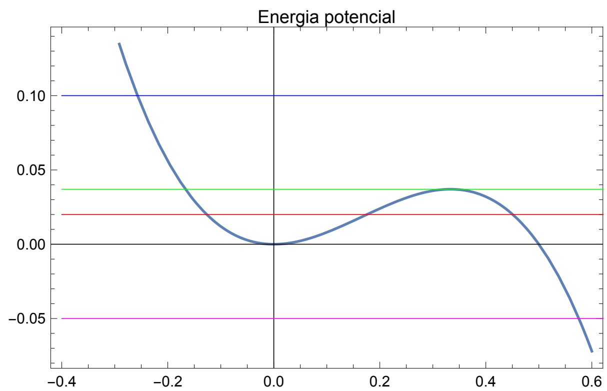


Figura 2: Forma do potencial assumindo que as constantes a=1 e b=2 em unidades arbitrárias. As curvas coloridas são dadas energias totais do sistema..

2. (2.5 pontos) Um partícula se move sob a ação de uma força

$$F(x) = -ax + bx^2 \tag{12}$$

com a,b sendo positivos.

(a) (1.0 pontos) Assuma que o potencial é zero quando x=0. Faça o gráfico do potencial e discuta os possíveis movimentos da partícula.
**Resposta:**

$$U(x) = -\int F(x)dx = -\int \left(-ax + bx^2\right) dx = ax^2/2 - bx^3/3 + C \tag{13}$$

aonde C é uma constante de integração. É dado que $U(x = 0) = 0$, portanto C=0.
O potencial se anula nos pontos $U(x) = 0 \rightarrow ax^2/2 - bx^3/3 = 0$ : $x_1 = 0 \quad x_2 = \dfrac{3a}{2b}$. A derivada de U(x) se anula nos pontos

$$\frac{dU}{dx} = ax - bx^2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = \frac{a}{b} \tag{14}$$

Nestes pontos temos que

$$c = a - 2bx \qquad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_3} = a > 0 \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_4} = -a < 0 \tag{15}$$

e portanto no ponto $x = x_3$ tem a concavidade positiva e para $x = x_4$ tem a concavidade negativa.

No infinito temos o seguinte comportamento $\lim_{x\to\infty} U(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} U(x) = +\infty$. Com estas informações podemos montar a forma da curva, que seria a Figura 2.
Os possíveis movimentos da partícula são

(a) Para $E = E_1$ que corresponde a curva azul, temos que existe um ponto de retorno da partícula para $x = x_5$ com $E_1 = U(x_5)$.

(b) Para $E = E_2$ que corresponde a curva vermelha, temos duas regiões disjuntas. Para $x_6 < x < x_7$ a partícula fica confinada perto da origem (em outras palavras tem dois pontos de retorno) e para $x > x_8$ fica com um ponto de retorno.

(c) Para $E = E_3$ que corresponde a curva magenta, temos que existe um ponto de retorno da partícula para $x = x_9$ com $E_3 = U(x_9)$.

Para qualquer valor de energia ou a partícula é confinada ou tem apenas um ponto de retorno. As regiõe classicamente proibidas são fora das regiões descritas acima.

(c) (0.5 pontos) Determine a energia máxima possível tal que a partícula terá pontos de retorno, assumindo que no instante inicial da partícula esteja ao redor da origem.
**Resposta:**
Conforme visto, para $E = E_2$ a partícula terá pontos de retorno e para $E = E_1$ terá um ponto de retorno. O caso limite é quando temos o caso da curva verde na Figura 2 que corresponde ao caso quando a energia é igual ao valor do potencial no ponto do retorno $x = x_4$. Neste ponto temos que

$$U(x_4) = \left(ax^2/2 - bx^3/3\right)\Big|_{x\to x_4} = \frac{a^3}{6b^2} \tag{16}$$

portanto a máxima energia para a partícula ficar confinada ao redor da origem é quando $E_{\max} = U(x_4) = \dfrac{a^3}{6b^2}$.

(d) (1.0 pontos) Caso existam pontos de equilíbrio, determine a frequência de pequenas oscilações em torno destes pontos. Qual será a velocidade nos pontos de equilíbrio?

**Resposta:**
Para pontos de equilíbrio estáveis temos que a concavidade da curva seja positiva no pontos extremos da função. Conform visto o ponto $x = x_3$ tem a concavidade positiva e para $x = x_4$ tem a concavidade negativa, porttanto em $x = x_3$ é um ponto de equilíbrio estável e $x = x_4$ é um ponto de equilíbrio insável. Só existem estes pontos de equilbŕio se cumpre a condições do item anterior, $E < E_{\max} = \dfrac{a^3}{6b^2}$.

Somente podemos associas pequenas oscilações para pontos estáveis, pois neste caso $\dfrac{d^2U}{dx^2} > 0$, que neste caso seria somente o ponto $x = x_3 = 0$. Fazendo a expansão de Taylor ao redor deste ponto temos

$$U(x) = (U)_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)}{1!}\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_0} + ...$$

no ponto $x = x_3 = 0$ temos que

$$U(x_3) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_3} = 0 \quad \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_3} = a \rightarrow U(x) \sim \frac{ax^2}{2}$$

Comparando com o potencial da força elástica vemos que corresponde a uma força com a constante da mola dada por k=a.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax \quad x(t) = A\cos w_0 t + B\sin w_0 t$$

Substituindo na equação diferencial temos $w_0^2 = \dfrac{a}{m}$.
A velocidade nos pontos do equilíbrio será (a) se estável o potencial está no ponto mínimo, e então a velocidade será a máxima possível, no ponto $x = x_3$, temos $E = \dfrac{mv^2}{2} + U(x_3) = \dfrac{mv^2}{2}$ e portando $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$ e (b) se for instável o potencial está no ponto máximo, e então a velocidade será a mínima possível, no ponto $x = x_4$, temos $E = \dfrac{mv^2}{2} + U(x_4)$ que implica que $v = \sqrt{\dfrac{2(E - U(x_4))}{m}}$

3. (3.5 pontos) Seja uma massa m pendurado num fio, de massa zero, e de comprimento l, conforme a Figura 1. O fio está preso ao teto e pode se mover-se livremente no plano vertical. A posição do fio pode ser completamente especificada por um ângulo $\phi$, medido a partir da posição vertical.

(a) ( 0,5 ponto) Determine as forças presentes e encontre a equação de movimento. As forças presentes são conservativas?

**Resposta:**

Existem duas forças presentes neste caso a força gravitacional e a tensão no fio. Como o fio é inextensível temos que a partícula segue uma trajetória de raio constante, e podemos usar coordenadas polares neste caso, usando a notação da Figura 1 usaremos que $\theta = \phi$ portanto $\vec{a} = -l\dot{\phi}^2\hat{e}_r + l\ddot{\phi}\hat{e}_\phi$.

Podemos decompor as equações de Newton em duas direções, uma na direção radial (ao longo do fio) e o outra na direção perpendicular, a angular

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{T} \quad ma_r = (F_{\text{peso}})_r + T_r \quad ma_\phi = (F_{\text{peso}})_\phi + T_\phi$$

e temos pela Figura 1 que $T_r = T$ e $T_\phi = 0$. Como o fio é inextensível existe um equilíbrio na direção radial:

$$\begin{aligned} ma_r &= (F_{\text{peso}})_r + T \quad ma_\phi = (F_{\text{peso}})_\phi \quad (F_{\text{peso}})_r + T = -mg\cos\phi + T = 0 \\ \rightarrow a_r = 0 \quad ma_\phi &= -mg\sin\phi \end{aligned}$$

A força peso é uma força conservativa.

(b) ( 1,0 ponto) Escreva a energia potencial do sistema, em termos do ângulo $\phi$ e dos parâmetros comprimento do fio, l e da massa do objeto m.

**Resposta:**

A energia potencial é

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} = -\int_0^\phi mg\sin\phi' l d\phi' = mgl(1-\cos\phi) \qquad (17)$$

temos que $d\vec{r} = ld\phi\hat{\phi}$.

(c) (0,5 ponto) Escreva a energia total do sistema em função de $\phi$ e de $\dot{\phi}$.

**Resposta:**
Como o sistema é conservativo temos que a energia é conservada

$$E = T + U(\vec{r}) = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\phi) = \frac{ml^2\dot{\phi}^2}{2} + mgl(1 - \cos\phi) \quad (18)$$

como o movimento é com raio constante temos que $\vec{v} = l\dot{\phi}\hat{e}_\phi$

(d) (1,5 ponto) Ache a solução $\phi(t)$, na aproximação de pequeno ângulos $\phi \ll 1$, assuma que no instante inicial o pêndulo está num ângulo $\phi(t=0) = \phi_0$ e com velocidade angular $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0$ . Mostre que o movimento é periódico e encontre o período deste movimento.
**Resposta:**
Do item (a) achamos a equação de movimento,

$$ma_\phi \quad = \quad -mg\sin\phi \sim -mg\phi = ml\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

As soluções tentativas são da forma $\phi = Ae^{\alpha t}$ e obtemos que $\alpha = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$. Então temos que

$$\phi(t) = A\sin w_o t + B\cos w_0 t$$

com $w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Aplicando as condições iniciais, $\phi(t=0) = \phi_0$ e $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0$ temos

$$\phi(t) = \left(\frac{\dot{\phi}_0}{w_0}\right)\sin w_o t + \phi_0 \cos w_0 t$$

esta é uma função periódica de $w_0 T = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

4. (0.8 pontos) Quais destas afirmações são verdadeiras e quais são falsas para que a energia mecânica de um sistema seja conservada?

   (a) (0.2 pontos) as forças dependem da velocidade e não da posição.

   **Resposta:**

   F

   (b) (0.2 pontos) as forças derivem de potenciais.

   **Resposta:**

   V

   (c) (0.2 pontos) a energia cinética seja constante.

   **Resposta:**

   F

   (d) (0.2 pontos) se possa calcular o trabalho da forças ao longo do caminho mais curto entre dois pontos.

   **Resposta:**

   F