F315-C- Mecânica Clássica —Prova 1a- 1^{o} Semestre de 2013

1. Uma objeto de massa m é lançado verticamente para cima, e está submetido a ação de uma força de arrasto que pode descrita um termo proporcional a velocidade ao quadrado (com uma constante c).

   (a) Escreva a Lei de Newton desde sistema, é lançado verticamente para cima, descrevendo claramente as convenções usadas. Não é necessário resolver a equação. (**1,0 ponto**).

   (b) Determine a relação entre a velocidade e a posição, a relação v=v(x), assumindo que em $x = x_0 \quad v(x_0) = v_0$. (**1,0 ponto**)

   (c) Qual é a altura máxima possível que a massa alcança no movimento de subida, escreva em termos da velocidade inicial e dos parâmetros b e m da massa? (**0,5 ponto**)

   (d) Escreva a Lei de Newton desde sistema, após o momento em que a massa atinge a altura máxima h_{max} e começa a cair. Qual é a velocidade quando a massa atinge o solo? Se voce não resolveu o item (d), assuma que a altura máxima é dada, como h_{max}. (**1,0 ponto**).

2. Um brinquedo de criança, conforme a Figura 1, que é um semi-hemisfério de raio R, com um cilindro no topo. O centro de massa do objeto está localizado numa altura h a partir do chão.

   (a) Escreva a energia potencial gravitacional do objeto, quando o objeto é movido um ângulo θ em relação a vertical em termos dos parâmetros altura h e raio R mostrado na Figura 1. (**1,0 ponto**).

   (b) Para quais valores de h e R, o ângulo $\theta = 0$ é um equilíbrio estável ? (**1,0 ponto**).

   (c) Faça a aproximação de pequenos ângulos $\theta << 1$, e obtenha a energia potencial neste limite. Qual é o período T de pequenas oscilações deste sistema ? (**1,0 ponto**).

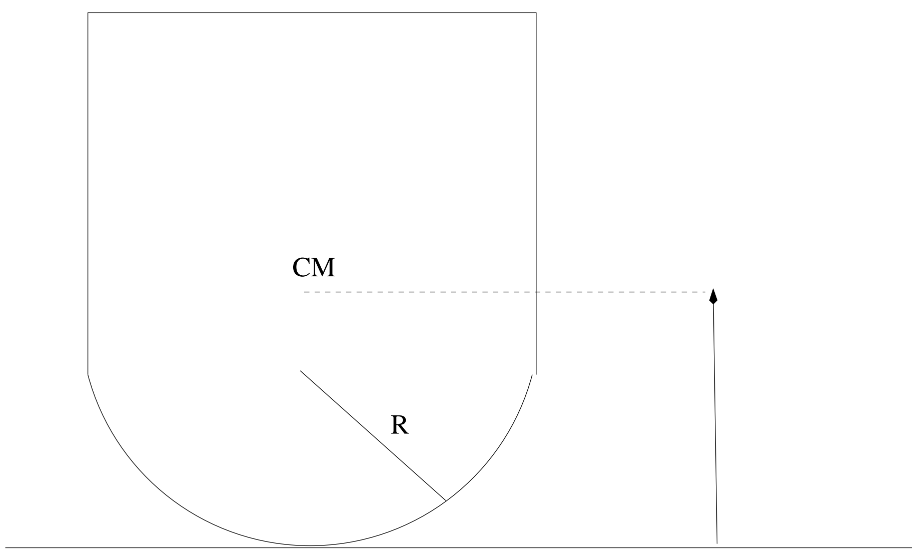

Figura 1: Um brinquedo de criança que é um semi-hemisfério de raio R, com um cilindro no topo. A altura do CM é h.

3. A energia potencial de uma objeto de massa m andando em uma dimensão, é $V(r) \ = U_0 \left(\frac{r}{R} + \lambda^2 \frac{R}{r} \right)$, onde r é a distância até a origem, $0 < r < \infty$. Temos que U_0, λ e R são constantes positivas.

(a) Encontre a posição de equilíbrio deste potencial. (**1,0 ponto**)

(b) Esboce o gráfico da energia potencial em função de r. (**1,0 ponto**)

(c) Mostre que para pequenos deslocamentos a energia potencial pode ser escrita como $U = \text{constante} + \frac{kx^2}{2}$, onde x é a disytância do ponto de equilíbrio.(**1,0 ponto**)

(d) Qual é a frequência angular de pequenas oscilações? (**0.5 ponto**)

Fórmulas:

$$Ax^2 + bx = A\left((x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A^2}\right)$$

$$\frac{1}{x(A+BX)} = \frac{1/A}{x} - \frac{B/A}{A+Bx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - A^2} = \frac{1}{A}\ arctanh\left(\frac{x}{A}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \ \arctan x$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$