F315 Mecânica Clássica I
Turma B
2^o Semestre de 2017
Prova 2

Nome: RA: Assinatura :

Dados:

$$\begin{aligned}
\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad \cos(A+\epsilon) \sim \cos A\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right) - \sin A\,\epsilon \\
\sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad \sin(A+\epsilon) \sim \sin A\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right) + \cos A\,\epsilon
\end{aligned}$$

onde ϵ é uma quantidade pequena comparada com A.

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\beta t}\left(A\cos w_1 t + B\sin w_1 t\right) \quad w_1 = \sqrt{w_0^2-\beta^2} \\
x(t) &= Ae^{-(\beta+w_2)t} + Be^{-(\beta-w_2)t} \quad w_2 = \sqrt{-w_0^2+\beta^2} \\
x(t) &= (A+Bt)\,e^{-\beta t}
\end{aligned}$$

Para forças periódicas,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}\left(a_n\cos nwt + b_n\sin nwt\right) \quad a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau F(t')\cos nwt'dt' \quad b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau F(t')\sin nwt'dt'$$

função de Heaviside e função impulso

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \qquad I(t_0,t_1) = H(t_0) - H(t_1)\begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1 & t_0<t<t_1 \\ 0 & t>t_1 \end{cases}$$

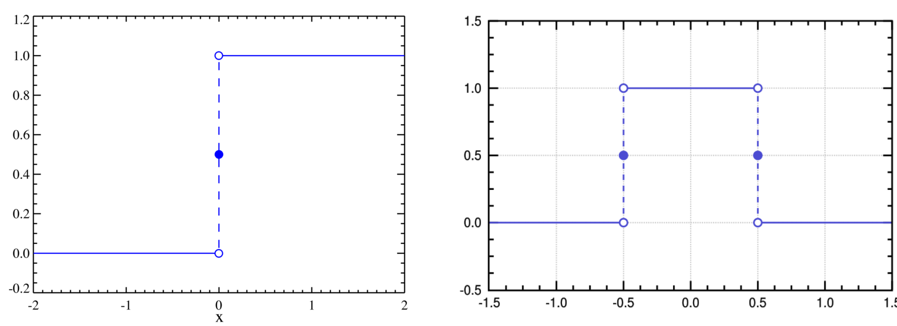

Figura 1: Função degrau ou Heaviside $H(t-t_0)$ cm $t_0 = 0$s e a função impulso $I(t_0,t_1)$ com $t_0 = -0.5$ s e $t_1 = +0.5$ s. Fonte : By Omegatron - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=801382 e CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=801402

1. (**2,0 ponto**) Seja um oscilador harmônico unidimensional submetido a força elástica, mas sem força resistiva.

(a) (**1.0 ponto**) Determine a solução deste problema no caso em que as condições iniciais são $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}(t=0) = v_0$. Determine a energia do sistema em função de x_0 e de v_0.

Resposta:

A equação de movimento é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Substituindo a solução tentativa $x(t) = Ae^{\alpha t}$ temos que

$$m\alpha^2 = -k \rightarrow \alpha = i \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

A solucção, lendo n formulário, é

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t}\left(A\cos w_1 t + B\sin w_1 t\right) \quad w_1 = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

no caso particular de $\beta \rightarrow 0$,

$$x(t) \quad = \quad \left(A\cos w_1 t + B\sin w_1 t\right) \quad w_1 = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e temos que

$$x(t) \quad = \quad A\cos w_o t + B\sin w_o t \quad \dot{x}(t) = -Aw_o\sin w_o t + Bw_0\cos w_o t$$

Aplicando as condições iniciais temos que

$$x_0 = A \quad v_0 = Bw_0 - Aw_o\sin w_o t + Bw_0\cos w_o t$$

então

$$x(t) \quad = \quad x_0\cos w_o t + \frac{v_0}{w_0}\sin w_o t \tag{2}$$

A energia total é dada por

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \tag{3}$$

como a energia é conservada eu posso calcular em qualquer instante, no instante inicial temos que

$$E = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} \tag{4}$$

(b) (**1,0 ponto**) Determine o formato das curvas no plano $x-\dot{x}$ para *qualquer instante do tempo* no caso em que as condições iniciais são as dadas no item (a).

Resposta:

Usando a fórmula da energia temos que

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m(dx/dt)^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m(\dot{x})^2}{2} \tag{5}$$

A equação acima é no formato de uma elipse com centro em $x = \dot{x} = 0$ e com os semi-eixos dados em função da energia.

$$1 = \frac{kx^2}{2E} + \frac{m(\dot{x})^2}{2E} = \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2E/m}}\right)^2 \tag{6}$$

com a energia dada por

$$E = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} \tag{7}$$

(c) (**0,5 ponto**) Existe interseção entre as curvas com diferentes condições iniciais? Mostre se existe interseção.

Resposta:

Como a curvas com diferentes condições iniciais corresponde a diferentes curvas de nível (em outras palavras com diferentes semi-eixos) então nunca se interseptam. Todas as curvas tem como centro a figura então são elipses concentricas.

2. (**4,0 pontos**) Seja um oscilador harmônico unidimensional submetido a uma força elástica com constante elática k e a uma força resistiva dependente linearmente da velocidade com uma constante b.

(a) (**1,5 pontos**) Escreva a equação de Newton deste sistema. Assuma que $\sqrt{\frac{k}{m}} > \left(\frac{b}{2m}\right)$ então calcule a posição e a velocidade em função do tempo assumindo que as condições iniciais são que a posição em t=0 é dada por x_0, onde x_0 é uma constante e que a velocidade em t=0 é nula.

Resposta:

A equação diferencial é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dot{x}$$

Na versão da equação de movimento temos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x + 2\beta\dot{x} = 0$$

onde usamos as definições que $\beta = \dfrac{b}{2m}$ e que $w_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. É dado no problemas que devemos assumir que $\sqrt{\dfrac{k}{m}} > \left(\dfrac{b}{2m}\right)$ que escrito em termos de β e de w_0 temos que

$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \left(\frac{b}{2m}\right) \rightarrow w_0 > \beta$$

que implica que é subamortecido. As condiç oes inicias são $x(t = 0) = x_0$ e que $\dot{x}(t = 0) = 0$, então temos que

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t}\left(A\cos w_1 t + B\sin w_1 t\right) \qquad w_1 = \sqrt{w_0^2 - \beta^2} > 0$$

Uma forma mais conveniente é que

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t} A\cos(w_1 t - \delta)$$

Aplicando as condições iniciais temos que:

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t} A\cos(w_1 t - \delta) \quad \dot{x}(t) = (-\beta)e^{-\beta t} A\cos(w_1 t - \delta) - e^{-\beta t}(Aw_1)\sin(w_1 t - \delta)$$

Temos duas equações

$$0 \quad = \quad -\beta A\cos\delta + Aw_1\sin\delta \quad x_0 = A\cos\delta \rightarrow \tan\delta = \frac{\beta}{w_1} \quad A = \frac{x_0}{\cos\delta} \quad \tan^2\delta + 1 = \frac{1}{\cos^2\delta}$$

$$\cos\delta \quad = \quad \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + \beta^2}} \quad \sin\delta = \frac{\beta}{\sqrt{w_1^2 + \beta^2}} \rightarrow A = \frac{x_0\sqrt{w_1^2 + \beta^2}}{w_1} \quad \sin\delta = \frac{\beta}{\sqrt{w_1^2 + \beta^2}} \tag{8}$$

então temos que

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t} A\cos(w_1 t - \delta) \quad = e^{-\beta t}\left(A\cos(w_1 t)\cos\delta + A\sin(w_1 t)\sin\delta\right)$$

usando a fórmula no formulário. então temos que substituindo as expressões para A e δ temos que

$$x(t) \quad = \quad e^{-\beta t}\left(x_0\cos(w_1 t) + x_0\sin(w_1 t)\left(\frac{\beta}{w_1}\right)\right)$$

teste de sanidade, como a velocidade é nula, então toda a expressão deve ser proporcional a x_0, senão teria dimensões erradas. Outras soluções seriam em vez de usar a expressão para o caso subamortecido, usar a expressão para o super-amortecido. Mas deve se deixar claro que temos um termo imaginário no expoente das exponenciais. Ao fim devemos escrever que tomamos a parte real da expressão.

(b) (**2,0 pontos**) Assuma que agora exista uma força adicional $F = F_0 e^{-\alpha t}$, onde F_0 e α são constantes. Qual é a solução geral da posição em função do tempo com as condições iniciais dadas no item (a)?

Resposta:
Como a força externa é uma funç ao exponencial, a solução particular deve ser uma exponencial (podemos usar tambem uma exponencial imaginária, mas devemos tomar cuidado com o resultado na manipulação de quantidades imaginárias). Usaremos que

$$x_{\text{particular}}(t) = Be^{-Ct}$$

substituindo na equação temos que

$$e^{-Ct}\left(C^2B - 2\beta BC + w_0^2 B\right) == \frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}$$

então temos que $C = \alpha$ e que

$$B = \frac{F_0}{m\left(C^2 - 2\beta C + w_0^2\right)} = \frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)}$$

A solucção geral é

$$x_{\text{geral}}(t) = x_{\text{homogenea}}(t) + x_{\text{particular}}(t) = e^{-\beta t}A\cos(w_1 t - \delta) + \frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)}e^{-\alpha t}$$

Aplicando as condições iniciais $x_{\text{geral}}(t=0) = x_0$ e que $\dot{x}_{\text{geral}}(t=0) = 0$

$$\begin{aligned}
x_{\text{geral}}(t) &= e^{-\beta t}A\cos(w_1 t - \delta) + \frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)}e^{-\alpha t} \\
\dot{x}_{\text{geral}}(t) &= (-\beta)e^{-\beta t}A\cos(w_1 t - \delta) - e^{-\beta t}(Aw_1)\sin(w_1 t - \delta) - (\alpha)\frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)}e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

Para simplicar iremos escrever o coeficiente da solucção particular como B, então

$$\begin{aligned}
x_{\text{geral}}(t) &= e^{-\beta t}A\cos(w_1 t - \delta) + Be^{-\alpha t} \\
\dot{x}_{\text{geral}}(t) &= (-\beta)e^{-\beta t}A\cos(w_1 t - \delta) - e^{-\beta t}(Aw_1)\sin(w_1 t - \delta) - (\alpha B)e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
0 &= -\beta A\cos\delta + Aw_1\sin\delta - (\alpha B) \quad x_0 = A\cos\delta + B \rightarrow \quad A = \frac{(x_0 - B)}{\cos\delta} \\
0 &= -\beta(x_0 - B) + \frac{w_1(x_0 - B)}{\cos\delta}\sin\delta - \alpha B \rightarrow \tan\delta = \frac{\beta(x_0 - B) + \alpha B}{w_1(x_0 - B)} \\
\cos\delta &= \frac{w_1(x_0 - B)}{\sqrt{(w_1(x_0 - B))^2 + (\beta(x_0 - B) + \alpha B)^2}} \quad \sin\delta = \frac{\beta(x_0 - B) + \alpha B}{\sqrt{(w_1(x_0 - B))^2 + (\beta(x_0 - B) + \alpha B)^2}}
\end{aligned}$$

teste de sanidade, se fizermos $B \rightarrow 0$ recuperamos a equação do item anterior. E então

$$x_{\text{geral}}(t) = e^{-\beta t}\left((x_0 - B)\cos(w_1 t) + \frac{(x_0 - B)}{\tan\delta}\sin(w_1 t)\right) + Be^{-\alpha t}$$

(c) (**0,5 ponto**) A amplitude quadrada A^2, encontrada no item anterior é uma função do parâmetro externo α. Faça o gráfico desta função e determine os pontos de máximo ou mínimo neste caso com a condição $\sqrt{\dfrac{k}{m}} > \dfrac{b}{2m}$ ainda se aplicando.

Resposta:

Temos que

$$B = \frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)} \quad B^2 = \left(\frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + w_0^2\right)}\right)^2$$

É dito que a condição $\sqrt{\dfrac{k}{m}} > \dfrac{b}{2m}$ deve ser aplicada, que corresponde a $w_0 > \beta$. Podemos reescrever a amplitude quadrada como,

$$B = \left(\frac{F_0}{m\left(\alpha^2 - 2\beta\alpha + \beta^2 - \beta^2 + w_0^2\right)}\right)^2 = \left(\frac{F_0}{m\left((\alpha-\beta)^2 + (w_0^2 - \beta^2)\right)}\right)^2$$

Em analogia com o feito em sala de aula, para $\alpha \to \infty$ a amplitude vai a zero, e para $\alpha \to 0$ temos que a amplitude é constante. Da expressão acima vemos que o numerador é sempre positivo, então só podemos ter duas formas, ou o limite $\alpha -> 0$ é um máximo ou um existe um α não zero que é máximo. Derivando a amplitude temos que

$$\frac{dB^2}{d\alpha} \propto 2(\alpha - \beta) \to \alpha = \beta \tag{9}$$

O ponto crítico $\alpha \to \beta$ temos que

$$B^2_{\text{critico}} = \left(\frac{F_0}{m\left((w_0^2 - \beta^2)\right)}\right)^2 > \left.\left(\frac{F_0}{m\left((\alpha-\beta)^2 + (w_0^2 - \beta^2)\right)}\right)^2\right|_{\alpha->0} \tag{10}$$

Então a amplitude para $\alpha = \beta$ é maior do que no caso $\alpha \to 0$, então $\alpha = \beta$ é um ponto de máximo. Os mínimos correspondem a $\alpha \to \infty$. Se fosse dito o comportamento para $\alpha \to \infty$ e para $\alpha \to 0$ já seria considerado.

3. (**4,0 pontos**) Seja uma massa m presa a uma mola, com constante elástica k e sem força resistiva, que está pendurada no teto. Foi definido que a direção vertical como o eixo x. No tempo t=0 temos que a massa está na posição $x(t=0) = x_0$ e em repouso, $v(t=0) = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}(t=0) = 0$. Assuma que a força peso é deprezível. Seja x(t) a deslocamento da mola em relação ao ponto de equilíbrio em qualquer tempo t.

   (a) (**2,0 pontos**) Uma força F(t)é aplicada na direção para baixo da seguinte forma

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 & t > t_0 \end{cases} \tag{11}$$

aond F_0 é uma constante. Encontre a solução x(t) da equação diferencial de movimento para o instante $t > t_0$. A solução deve ser escrita em função de de F_0, k e m.

Resposta:

Foram considerados duas respostas, uma em que a condição dada no enunciado $x(t=0) = x_0$ e $v(t=0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}(t=0) = 0$ é para válida para qualquer solução achada para $t > 0$ ou pra $t > t_0$.

Primeiro caso: vamos achar a solução para $t > 0$, e depois achar a condição inicial para $t = t_0$. Para $t > 0$ temos que o problema é um oscilador harmônico sem força resistiva e sem força externa. A solução é

$$x(0 < t < t_0) = A\cos(w_0 t - \delta)$$

com as condições iniciais temos que

$$x(t) = A\cos(w_0 t - \delta) \qquad \dot{x}(t) = -(Aw_0)\sin(w_0 t - \delta)$$

com as condições iniciais temos que

$$x_0 = A\cos(\delta) \qquad 0 = +(Aw_0)\sin(\delta) \quad \rightarrow \delta = 0 \quad A = \left.\frac{x_0}{\cos\delta}\right|_{\delta\rightarrow 0} = x_0$$

$$x(t) = x_0\cos(w_0 t)$$

Em $t = t_0$ temos que

$$x(t = t_0) = x_0\cos(w_0 t_0) \qquad \dot{x}(t = t_0) = -(x_0 w_0)\sin(w_0 t_0)$$

A solução da homogênea para $t > t_0$ é

$$x(t > t_0) = A\cos(w_0 t - \delta) \qquad \dot{x}(t > t_0) = -(Aw_0)\sin(w_0 t - \delta)$$

A força externa é uma função constante para $t > t_0$, então usaremos uma solução partircular que será uma constante:

$$x_{\text{particular}}(t) = D$$

Substituindo na equação de movimento temos que

$$\frac{d^2 x_{\text{particular}}}{dt^2} + w_0^2 x_{\text{particular}} = \frac{F_0}{m} \rightarrow 0 + w_0^2 D = \frac{F_0}{m} \rightarrow D = \frac{F_0}{m w_0^2}$$

então a solução geral será

$$x_{\text{geral}}(t > t_0) = A\cos(w_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m w_0^2}$$

e então

$$\begin{aligned} x_{\text{geral}}(t = t_0) &= A\cos(w_0 t_0 - \delta) + \frac{F_0}{m w_0^2} = x_0\cos w t_0 \\ \dot{x}_{\text{geral}}(t = t_0) &= -A w_0\sin(w_0 t_0 - \delta) = -(x_0 w_0)\sin(w_0 t_0) \end{aligned} \tag{12}$$

Fazendo a razão temos

$$\frac{\sin w_0 t_0}{\cos w_0 t_0 - \dfrac{F_0}{m w_0^2}} = \tan(w_o t_0 - \delta) \quad A = \frac{x_0 \cos w t_0 - \dfrac{F_0}{m w_0^2}}{\cos(w_0 t_0 - \delta)} \tag{13}$$

e com estas expressões teríamos

$$x_{\text{geral}}(t > t_0) = A\cos(w_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m w_0^2}$$

com A e δ dado pela equação 13. Outra forma seria escrever a solução geral na forma

$$x'_{\text{geral}}(t > t_0) = A'\cos(w_0(t - t_0) - \delta') + \frac{F_0}{m w_0^2}$$

e aplicando as condições iniciais nesta solução teríamos que

$$\begin{aligned} x'_{\text{geral}}(t = t_0) &= A'\cos(-\delta') + \frac{F_0}{m w_0^2} = x_0 \cos w_0 t_0 \\ \dot{x}'_{\text{geral}}(t = t_0) &= -A' w_0 \sin(-\delta') = -(x_0 w_0)\sin(w_0 t_0) \end{aligned} \tag{14}$$

e então

$$\begin{aligned} x'_{\text{geral}}(t) &= A'\cos(w_0(t - t_0))\cos\delta' + A'\sin(w_0(t - t_0))\sin\delta' + \frac{F_0}{m w_0^2} \\ &= \left(x_0 \cos w_0 t_0 - \frac{F_0}{m w_0^2}\right)\cos(w_0(t - t_0)) + x_0 \sin(w_0(t - t_0))\sin w_0 t_0 + \frac{F_0}{m w_0^2} \end{aligned}$$

Segundo caso que também considerei: Assuma solução para $t > t_0$ e aplique as condições iniciais dadas em t=0.

$$x_{\text{geral}}(t > t_0) = A\cos(w_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m w_0^2}$$

então teremos que

$$A = x_0 - \frac{F_0}{m w_0^2} \quad \delta = 0$$

$$\begin{aligned} x_{\text{geral}}(t) &= A\cos(w_1 t - \delta) + \frac{F_0}{m w_0^2} \\ \dot{x}_{\text{geral}}(t) &= -A w_1 \sin(w_1 t - \delta) \end{aligned} \tag{15}$$

(b) (**1,5 ponto**) Assuma agora que a força no mesmo sentido e direção do item (a) ocorre por um tempo finito τ, isto é uma força impulso

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \tag{16}$$

aond F_0 é uma constante. Encontre a solução x(t) da homogênea e da particular para o instante $t > t_0$. A solução deve ser função de F_0, k e m.

Resposta:

Neste caso não temos uma função constante, mas uma função impulso, que é finita por um tempo entre t_0 a t_1. Do formulário é dito que uma função impulso é dada por a soma de duas funcções que são ligadas num certo instante tempo t'. Uma possível forma de resolver é usar a solução anterior para a função externa constante para $t > t_0$ e somar outra solução também constante para $t > t_1$, mas com o sinal da força trocado. Com isto obtemos uma força impulso. A primeira parte da solução é copiar a solução do item anterior, adicionando uma solução trocando $t_0 \to t_1$ e $F_0 \to -F_0$.

$$\begin{aligned} x'_{\text{geral}}(t) &= A' \cos(w_0(t-t_0)) \cos\delta' + A' \sin(w_0(t-t_0)) \sin\delta' + \frac{F_0}{mw_0^2} \\ &= \left(x_0 \cos w_0 t_0 - \frac{F_0}{mw_0^2}\right) \cos(w_0(t-t_0)) + x_0 \sin(w_0(t-t_0)) \sin w_0 t_0 + \frac{F_0}{mw_0^2} \\ &+ \left(x_0 \cos w_0 t_0 + \frac{F_0}{mw_0^2}\right) \cos(w_0(t-t_1)) + x_0 \sin(w_0(t-t_1)) \sin w_0 t_0 - \frac{F_0}{mw_0^2} \end{aligned}$$

<u>Outra forma de fazer</u> é usar a solução do caso anterior, e calcular o valor da função e de sua derivada para $t = t_1$ e usar isto como as condições iniciais para a solução para $t > t_1$.

(c) Questão extra :(**0,5 ponto**) Assuma que tomemos o limite de $\tau \to 0$ e $F_0 \to \infty$ na solução do item anterior, mas mantendo o produto aF_0 constante e finito, escreva a função x(t) neste caso limite.

Resposta:

Devemos tomar o limite de $\tau - \to 0$ ou de outra forma $t_0 \to t_1$. Para isto escrevemos que $t_1 = t_0 + \tau$:

$$\begin{aligned} x'_{\text{geral}}(t) &= \left(x_0 \cos w_0 t_0 - \frac{F_0}{mw_0^2}\right) \cos(w_0(t-t_0)) + x_0 \sin(w_0(t-t_0)) \sin w_0 t_0 + \frac{F_0}{mw_0^2} \\ &+ \left(x_0 \cos w_0 t_0 + \frac{F_0}{mw_0^2}\right) \underline{\cos(w_0(t-t_o-\tau))} + x_0 \underline{\sin(w_0(t-t_o-\tau))} \sin w_0 t_0 - \frac{F_0}{mw_0^2} \end{aligned}$$

onde marquei os termos que dependem de τ. do formulário temos que

$$\begin{aligned} \cos(w_0(t-t_o-\tau)) &= \cos w_0(t-t_o) \cos(-w_0\tau) - \sin w_0(t-t_o) \sin(-w_0\tau) \\ \cos(w_0(t-t_o-\tau)) &= \cos w_0(t-t_o) + \sin(w_0(t-t_o)) w_0\tau \\ \sin(w_0(t-t_o-\tau)) &= \sin w_0(t-t_o) \cos(-w_0\tau) + \cos w_0(t-t_o) \sin(-w_0\tau) \\ \sin(w_0(t-t_o-\tau)) &= \sin w_0(t-t_o) + \cos w_0(t-t_o)(-w_0\tau) \end{aligned} \tag{17}$$

então

$$
\begin{aligned}
x'_{\text{geral}}(t) &\sim \left(x_0 \cos w_0 t_0 - \frac{F_0}{m w_0^2}\right) \cos(w_0(t-t_0)) + \\
&\quad \left(x_0 \cos w_0 t_0 + \frac{F_0}{m w_0^2}\right) \left(\underline{\cos w_0(t-t_o) + \sin(w_0(t-t_o)) w_0 \tau}\right) \\
&+ x_0 \sin(w_0(t-t_0)) \sin w_0 t_0 + x_0 \left(\underline{\sin w_0(t-t_o) + \cos w_0(t-t_o)(-w_0\tau)}\right) \sin w_0 t_0 \\
&= x_0 \sin(w_0(t-t_0)) \sin(w_0(t_0)) + x_0 \cos w_0 t_0 \cos(w_0(t-t_0)) + \frac{(F_0\tau) w_0}{m w_0^2} \sin(w_0(t-t_0))
\end{aligned}
$$

O último termo é finito para $\tau \to 0$ e $F_0 \to \infty$.