F315- Mecânica Clássica —Prova 3 - 1^o Semestre de 2013

1.

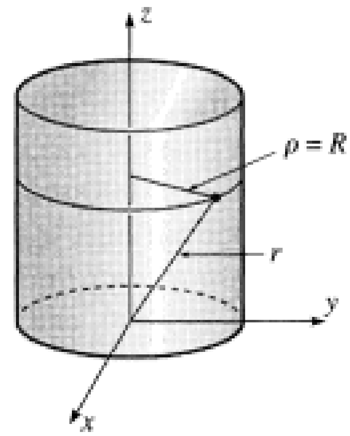

Figura 1:

Seja um cilindro de seção reta circular com raio R com centro no eixo z.

(a) Qual é o funcional da distância entre os pontos, (R, ϕ_1, z_1) e (R, ϕ_2, z_2) ?

(b) Encontre o menor distância entre os pontos (R, ϕ_1, z_1) e (R, ϕ_2, z_2) obtendo a função $\phi = \phi(z)$.

(c) Imagine o cilindro seja aberto, desenrolando no formato de uma superfície plana. Explique a curva encontrada no item (b).

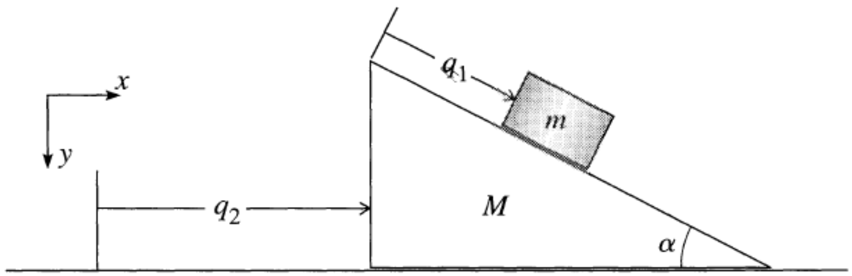

Figura 2: Um corpo de massa m desliza em cima de um corpo de mass M.

2. Um corpo de massa m desliza em cima de um corpo de massa M. Ambos corpos não tem força de atrito atuando, mas estão submetidos a força gravitacional. O corpo de massa m é solto no topo do corpo de massa M, partindo os dois do repouso. A superfície do bloco de massa M faz um ângulo α com a horizontal e tem um comprimento l.

   (a) Quais são as coordenadas generalizadas deste problema?

   (b) Escreva o Lagrangiano deste sistema.

   (c) Quais são as quantidades conservadas deste sistema? Devem ser escritas explicitamente.

   (d) Calcule as equações de Euler-Lagrange deste sistema.

   (e) Em quanto tempo o bloco de massa m leva para atingir o solo? A resposta deve ser dada em termos de m, M, α, g e de l.

3. Dois corpos de massas m_1 e m_2 interagem por uma força central $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$; é dado que a massa reduzida é $\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Podemos descrever o movimento em termos do raio r e do ângulo θ das coordenadas polares. Assuma que a força é dada por $F(r) = \dfrac{k}{r^2}$, onde k é positivo.

   (a) Dado que o potencial efetivo neste caso é dado por

$$V_{\text{efetivo}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

   onde V(r) é a energia potencial da força $\mathbf{F}$. Descreva as possíveis trajetórias sob a ação desta força para os diferentes valores da quantidade l. Qual é o significado da quantidade l?

   (b) É dado que a equação deste sistema em termos de $u = \dfrac{1}{r}$ e de θ temos que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\left(\frac{\mu}{l^2}\right)\left[\frac{F(1/u)}{u^2}\right]$$

   onde $F(r)$ é a componente da força $\mathbf{F}$. Resolva para o caso da força $F(r) = \dfrac{k}{r^2}$, onde k é positivo e encontre a equação $r = r(\theta)$. Assuma que a fase arbitrária δ que poderia ser adicionada a θ é identicamente nula.

   (c) Reescreva a equação de movimento $r = r(\theta)$, obtida no item anterior, em termos de coordenadas cartesianas e descreva a que movimento corresponde a solução deste problema.

Fórmulas

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\phi)^2 + (dz)^2 \tag{1}$$

$$E = \left(\frac{k}{2p}\right)\left(\epsilon^2 - 1\right)$$

onde $p = \dfrac{l^2}{\mu k}$, $\epsilon = Ap$.